

INFORME DE TRABAJO FINAL

MODELO POTENCIAL DE CRECIMIENTO EN DIÁMETRO PARA ÁRBOLES INDIVIDUALES DE CIPRÉS DE LA CORDILLERA (*AUSTROCEDRUS CHILENSIS*) EN LA REGIÓN DE EL BOLSÓN, RÍO NEGRO

Alumno: Manceñido, Andrés Ricardo
Director: Barrera, Marcelo D.
Co-Director: Caraballo, Horacio
Fecha de entrega: 1 de Septiembre de 2016

**MODELO POTENCIAL DE CRECIMIENTO EN DIÁMETRO PARA ÁRBOLES
INDIVIDUALES DE CIPRÉS DE LA CORDILLERA (*AUSTROCEDRUS CHILENSIS*)
EN LA REGIÓN DE EL BOLSÓN, RÍO NEGRO**

Resumen

El objetivo de este trabajo fue desarrollar un modelo de crecimiento potencial en diámetro para árboles individuales de ciprés de la cordillera (*Austrocedrus chilensis* (D. Don) Pic. Serm. et Bizzarri) que considera al diámetro a la altura del pecho y al índice de sitio como variables predictoras, en la región de El Bolsón, provincia de Río Negro. El mismo podrá luego ser modificado por un factor de competencia (fuera del alcance de este trabajo) para obtener el crecimiento de cada árbol individual.

Se evaluaron las muestras de rodajas a la altura del pecho de 21 ejemplares dominantes y codominantes de ciprés de la cordillera, procedentes de la Reserva Forestal Nacional “Loma del Medio” y la Reserva Forestal “El Guadal”, ubicadas en las cercanías de la localidad de El Bolsón.

Se utilizó el software libre de matemática dinámica GeoGebra para la estimación de los parámetros iniciales, los cuales luego se utilizaron para estimar los parámetros finales mediante una regresión no lineal de cuadrados mínimos con el comando nls (Nonlinear Least Squares) del software libre de estadística computacional R. Se compararon dos modelos, uno propuesto por Birch (1999) y otro nuevo, basado en uno propuesto por Zeide (1993). Éste último fue el utilizado, debido a su mejor desempeño.

El resultado final fue un modelo de crecimiento potencial único, que tiene al índice de sitio y al diámetro a la altura del pecho como variables predictoras, pero que debería ser extrapolado con cuidado a otros sitios. Por otro lado se obtuvieron como productos intermedios dos modelos de crecimiento potencial (uno para cada sitio), que serían más confiables.

Introducción

El ciprés de la cordillera (*Austrocedrus chilensis* (D. Don) Pic. Serm. et Bizzarri) es una especie endémica de la región Andino-Patagónica y la conífera nativa de mayor rango de distribución geográfica de Argentina. Es un importantísimo recurso forestal para el desarrollo de la región, ya que sus bosques son productores de madera de buena calidad y leña, así como también proporcionan microambientes favorables para los asentamientos humanos y las actividades turísticas (Dezzotti & Sancholuz, 1991). Debido a las cualidades estéticas y tecnológicas de su madera y a su amplia distribución natural, es la especie forestal más importante de la Provincia de Río Negro y la segunda en los bosques Andino-Patagónicos (Goya et al., 1995).

En la Argentina, los bosques de *Austrocedrus chilensis* se ubican en una región de ecotono entre la estepa patagónica, al Este, y los bosque húmedos de *Nothofagus* spp. al Oeste (Dezotti & Sancholuz, 1991; Veblen et al., 1995).

Cabrera (1971, también en Cabrera y Willink 1980), en su análisis fitogeográfico de la República Argentina, ubica al ciprés de la cordillera en Provincia Subantártica (dentro del Dominio Subantártico), más específicamente en la parte norte del Distrito de Bosque Caducifolio, ocupando las primeras avanzadas del bosque hacia el este, y en el Distrito Valdiviano, asociado a bosques de coihue (*Nothofagus dombeyi* (Mirb.) Oerst.).

Varios autores (Dezzotti & Sancholuz, 1991; Donoso, 1993; Veblen et al., 1995; Goya et al., 1995; 2005) ubican a los bosques de *Austrocedrus chilensis* del sector argentino en una franja discontinua de aproximadamente 10 a 50 km de ancho que se extiende entre los 36°30' S (noroeste de la provincia de Neuquén) y los 43°35' S (centro-oeste de la provincia de Chubut). Sin embargo, en un estudio más reciente, Pastorino et al. (2006) ubican el límite septentrional de la especie a los 37°7' S y el límite austral a los 43°44' S. Estos autores atribuyen la gran diferencia del límite

septentrional a una serie de imprecisiones en citas bibliográficas a lo largo de los años por parte de diversos autores. De cualquier manera, este amplio rango latitudinal la convierte en la conífera nativa de mayor rango de distribución geográfica del país.

El límite altitudinal superior de *Austrocedrus chilensis* en nuestro país se encuentra alrededor de los 1000-1100 msnm, principalmente limitado por su sensibilidad a las bajas temperaturas y el daño que la nieve causa a sus renovales (Dezzotti & Sancholuz, 1991).

Dezzotti & Sancholuz (1991) clasifican los bosques de *Austrocedrus chilensis* en tres tipos forestales, ubicados de este a oeste en función de un fuerte gradiente de menor a mayor humedad característico de la región:

- Bosques Marginales: constituidos por individuos aislados o pequeños grupos, ubicados hacia el este, en el ecotono con la estepa, en zonas de precipitaciones anuales de entre 600 y 900 mm.

- Bosques Compactos: bosques puros de ciprés, más o menos cerrados dependiendo de las condiciones locales, ubicados en zonas de precipitaciones anuales de entre 900 y 1600 mm.

- Bosques Mixtos: bosques mixtos de ciprés y *Nothofagus* spp. cuya proporción relativa depende de las condiciones locales, en zonas con precipitaciones anuales entre 1600 y 2000 mm.

La superficie total de bosques de ciprés de la cordillera en la República Argentina según Dezzotti & Sancholuz (1991) es de 159.000 ha, de las cuales sólo 69.500 ha se encuentran fuera de Parques Nacionales. De éstas, sólo alrededor de 24.000 ha se encuentran en la Provincia de Río Negro, pero todas ellas son del tipo Bosque Compacto o Bosque Mixto y por lo tanto constituyen un importante recurso para esta región, por ser las más productivas y las que presentan mayores posibilidades de manejo. Según el Primer Inventario Nacional de Bosques Nativos (Menéndez & La Rocca, 2007), existen 94.534 ha de "Bosque de Ciprés" (bosques con predominancia

de ciprés de la cordillera) dentro de la categoría de "Tierras Forestales" (tierras con una cubierta de copa de más del 20% y en los cuales los árboles deberían poder alcanzar una altura mínima de 7m a su madurez).

Veblen et al. (1995) caracterizan a *Austrocedrus chilensis* como una especie relativamente poco tolerante a la sombra, pero que es capaz de acelerar su crecimiento de manera considerable en respuesta a aperturas del dosel, incluso tras décadas de crecer oprimido en rodales densos. Otra característica importante de esta especie es su capacidad para desarrollarse en suelos muy disímiles (La Manna, 2005).

Según diversos autores (Donoso, 1993; Veblen et al., 1995) las tasas de crecimiento en diámetro de *Austrocedrus chilensis* varían según el sitio y la competencia, pero éstas pueden llegar hasta 1 cm/año. Dezzotti & Sancholuz (1991) citan en su trabajo tasas de crecimiento diametral promedio de $5,6 \pm 2,2$ mm/año en Bosques Marginales y de $3,8 \pm 1,1$ mm/año y $3,3 \pm 1,3$ mm/año en Bosques Compactos y Bosques Mixtos respectivamente. Por otro lado, Ferrando et al. (1993) en sus resultados preliminares encontraron un crecimiento medio diamétrico de 0,72 cm/año para árboles dominantes del sitio estudiado. Por su parte, Goya et al. (1998) encontraron tasas de crecimiento variables según la calidad de sitio, de hasta 1,5 cm/año en estadios tempranos de algunos de los rodales analizados, disminuyendo a valores inferiores a 0,3 cm/año en estadios tardíos en la mayoría de los sitios.

La evolución de los crecimientos individuales, especialmente de los árboles del estrato superior (dominantes y codominantes) tiene importantes efectos sobre la culminación de los crecimientos y el rendimiento total del rodal, por lo cual se convierte en una variable de estudio relevante a la hora de la toma de decisiones sobre posibles tratamientos silviculturales en rodales de esta especie (Goya et al., 1998). Por lo expuesto resulta útil el desarrollo de modelos de crecimiento adecuados que sirvan para predecir el comportamiento de la especie y permitan, junto con otras herramientas, la planificación del uso y conservación de este importante recurso

forestal. En particular, la capacidad de predecir el crecimiento (y por lo tanto el diámetro futuro) de los individuos de una especie puede permitir, entre otras cosas, la predicción del volumen en pie (mediante la ayuda de alguna función adecuada para la especie, que seguramente tenga al diámetro como una de sus variables de entrada) o la posibilidad de planificar una cierta distribución diamétrica deseada (dependiente de los objetivos del manejo).

Un modelo es una abstracción, o representación simplificada, de algún aspecto de la realidad y en este sentido, un modelo de crecimiento de rodal es una abstracción de la dinámica natural de un rodal, el cual podría abarcar el crecimiento, la mortalidad y otros cambios en la composición y estructura de un rodal (Vanclay, 1994). Son muchos y variados los modelos de crecimiento existentes, pero es posible clasificarlos según el tipo de información que estos demandan y el nivel de detalle que proporcionan. Vanclay (1994) los separa en modelos de rodal, modelos de clases de tamaño y modelos de árbol individual. Este autor también los clasifica en modelos comprensivos y modelos predictivos, según intenten modelar los procesos naturales reales o simplemente hagan una abstracción práctica de los aspectos más relevantes que afectan al crecimiento. Por último, este autor clasifica a los modelos de crecimiento en determinísticos o estocásticos, según den como resultado un único valor, o bien incorporen parámetros aleatorios o probabilísticos en la modelización y en consecuencia den como resultado una serie de valores con diferentes probabilidades de ocurrencia.

En cuanto a la incorporación del efecto de la competencia en los modelos de crecimiento para árboles, existen principalmente dos enfoques: incluir la competencia como una variable predictora más o predecir el incremento para árboles de crecimiento libre o poco afectados por la competencia (crecimientos potenciales) y luego calcular un índice de competencia que se empleará para reducir el crecimiento potencial una determinada proporción (Wykoff & Monserud, 1988).

Se han desarrollado numerosas funciones que intentan predecir el crecimiento de las plantas. Zeide (1993) analiza muchas de ellas y hace una comparación minuciosa. La más utilizada de ellas es la ecuación de Chapman-Richards (Richards, 1959), debido a su flexibilidad. Esta ecuación es una variación de la ecuación de Bertalanffy, pero que abandona ciertas restricciones teóricas (Richards, 1959), confiriéndole mayor flexibilidad y convirtiéndola así en una ecuación más descriptiva (Zeide, 1993). Si bien varios autores han criticado esta ecuación y han propuesto nuevas ecuaciones con ventajas respecto a ésta (Zeide, 1993; Birch, 1999; Yin et al., 2003), incluso ellos remarcan su flexibilidad y practicidad y admiten que puede ser muy adecuada en muchos casos. Algunos autores (Hahn & Leary, 1979; Sánchez-González et al., 2005) han encontrado que esta ecuación es muy adecuada para modelar el crecimiento en diámetro de árboles, sobre todo cuando se incorpora al modelo el índice de sitio. Palahí et al. (2008) utilizan la ecuación de Chapman-Richards para modelar la altura dominante, aunque emplean una ecuación diferente para modelar el crecimiento en diámetro.

Numerosos estudios dendrocronológicos se han realizado en *Austrocedrus chilensis*, generalmente en la región de ecotono con la estepa (Villalba & Veblen, 1997; 1998; Villalba, 2002) debido a su importancia como posible registrador del cambio climático por estar ubicado en zonas donde el recurso hídrico y otras variables climáticas comienzan a ser limitantes en el desarrollo de la especie (Principio c de la Dendrocronología: Amplitud Ecológica, según Fritts, 1976).

Por otro lado, algunos autores han analizado el crecimiento y dinámica de los rodales de esta especie (Goya et al., 1995; 1998; 2005, Burns et al., 2013). Otros autores incluso modelizan el crecimiento de esta especie, como Ferrando et al. (1993) pretenden evaluar un modelo de crecimiento en diámetro para árboles individuales de ciprés de la cordillera usando la ecuación de Chapman-Richards, para ejemplares de distintas posiciones sociológicas y calidades de sitio diferentes, pero dicho resumen

presenta solamente resultados preliminares y el trabajo completo nunca fue publicado. Por otro lado, Navarrete Espinoza (2008) realiza un modelo de crecimiento diametral para *Austrocedrus chilensis* en localidades del sur de Chile, pero su modelo no es muy útil, ya que se trata de un modelo lineal que relaciona el incremento medio anual con el diámetro a la altura del pecho. Ninguno de los modelos existentes incorpora el índice de sitio o la competencia como variables predictoras.

La edad de los árboles suele ser una de las variables que mejor respuesta tienen a la hora de representar el crecimiento, sobre todo en el estudio de árboles individuales (Zeide, 1993), pero es una de las variables más difíciles de determinar en la práctica en rodales naturales, y por lo tanto no suele ser una buena elección como variable predictora al modelar el crecimiento.

Para el contexto de este trabajo es importante destacar que crecimiento se refiere a la variación de dimensión, en este caso en diámetro a la altura del pecho (D), de un individuo (o población) en un período dado de tiempo, en contraste con el concepto de rendimiento o producción, que se refiere a la dimensión final alcanzada por un individuo (o población) al término de un período de tiempo (Vanclay, 1994). Además cabe aclarar que si bien la mayoría de los modelos de crecimiento suelen hacer referencia al crecimiento instantáneo (dD/dt), éste no suele ser una variable útil ya que no puede ser observado y por lo tanto en la práctica se utilizan crecimientos periódicos anuales ($\Delta D/\Delta t$) empleando los mismos modelos (Vanclay, 1994).

El objetivo de este trabajo fue desarrollar un modelo de crecimiento potencial en diámetro para árboles individuales de *Austrocedrus chilensis* que considera al diámetro a la altura del pecho (D) y al índice de sitio (IS) como variables predictoras, en la región de El Bolsón, provincia de Río Negro. Se trató de un modelo no espacial, determinístico y de tipo predictivo.

Materiales y métodos

Área de estudio

El estudio se realizó analizando muestras procedentes de la Reserva Forestal Nacional “Loma del Medio” (LM) y la Reserva Forestal “El Guadal” (EG), ubicadas ambas en las cercanías de la localidad de El Bolsón, provincia de Río Negro, entre los 41°40' y 42°10' S y entre los 71°20' y 71°42' W, con altitudes entre 200 y 400 msnm.

La región presenta una temperatura media anual de 9,3 °C y una precipitación media de 904 mm anuales. El balance hídrico indica excesos de humedad en invierno (mayo-septiembre) que totalizan 445 mm. Las moderadas deficiencias se presentan durante la temporada de crecimiento (diciembre-marzo) con un total de 156 mm (Goya et al., 1995).

Ambos sitios presentan características edáficas diferentes que afectan la disponibilidad hídrica a lo largo del año (Goya et al. 1998) y por lo tanto las calidades de sitio son diferentes. Por esta razón se esperaba encontrar diferencias significativas en las tasas de crecimiento en diámetro de ambos rodales explicadas por las diferencias de calidad de sitio, consistentes con las encontradas por Goya et al. (1998).

Toma y procesamiento de datos

Los datos de anchos de anillos se obtuvieron al analizar secciones transversales obtenidas a 1,30 m de altura de un total de 21 ejemplares de *Austrocedrus chilensis*. Dichas muestras fueron obtenidas de los ejemplares dominantes y codominantes de 9 parcelas circulares de área fija entre 400 y 600 m² ubicadas en los sitios antes mencionados, en los años 1995 y 1996. De los ejemplares muestreados, 9 correspondían al sitio EG y 12 al sitio LM. Dichos ejemplares se encontraban identificados con números de la forma XX.YY donde el primer número correspondía al

número de parcela y el segundo número correspondía al número de árbol. Para este trabajo se le agregaron a dichos nombres un prefijo de dos letras que representan el sitio. De esta manera, por ejemplo, la muestra LM3.1 corresponde al árbol n°1 de la parcela n°3 procedente del sitio Loma del Medio.

Las muestras fueron pulidas mediante lijados sucesivos, con lijas de granulometría decreciente, hasta la correcta visualización de los anillos de crecimiento. Las muestras pulidas fueron fechadas visualmente, conociendo la fecha del último anillo y contando hacia la médula. También se identificó la presencia de patrones particulares, como los llamados “anillos clave” (anillos delgados respecto a sus vecinos) que ayudaron a un primer cofechado visual de las muestras (Yamaguchi, 1991). En el caso de los ejemplares con fecha de corte desconocida, se utilizó dicho patrón para fechar provisoriamente las muestras.

Una vez fechadas visualmente las muestras, se procedió a la medición del ancho de los anillos en dos radios por cada muestra, con lupa binocular, tableta medidora (Velmex Unislide) conectada a un contador digital Metronics Quick-Check QC-1000 con una precisión de $\pm 0,01$ mm. En cada muestra se comenzó a medir desde el primer anillo completo más cercano a la médula, mientras que el último anillo (correspondientes al año 1994 o 1995 según la muestra) se dejó sin medir, ya que en muchos casos no se encontraba completo.

Las series así obtenidas, fueron contrastadas entre sí mediante el programa COFECHA, para corroborar el correcto fechado y medición de las muestras (Holmes, 1983). Dicho programa primero estandarizó las series, es decir que transformó sus valores en índices, de modo que quedara eliminada la variación en el ancho de los anillos asociada a la edad del árbol (anillos más anchos en la etapa juvenil y más delgados a mayores edades) y además se disminuyera la diferencia entre los crecimientos individuales de cada árbol, de modo que todas las series fueran comparables y tuvieran el mismo peso en la serie promedio. El programa no detectó

ningún problema en el fechado original, por lo cual no hubo que realizar ninguna remediación de las muestras.

Con los datos originales de las mediciones de los anchos de anillo se obtuvo para cada árbol un único valor de ancho de anillo para cada año, promediando los datos de sus dos radios medidos. Dichos valores promedio de anchos de anillo fueron luego multiplicados por 2 para obtener los datos de crecimiento anual en diámetro ($\Delta D/\Delta t$). Luego se calculó el diámetro (D) al comienzo de cada año mediante la suma de los crecimientos de los años anteriores. De este modo, tanto los datos de diámetro y crecimiento en diámetro se refieren a diámetro sin corteza. Finalmente se convirtieron todos estos datos a cm, por una cuestión de comodidad.

En el caso de las muestras del sitio LM se eliminaron los datos del año 1988 en adelante, ya que en ese sitio se había realizado una corta de rescate en la que se extrajo un 20% del área basal, constituida principalmente por árboles dominantes (Goya et al., 1998; 2005) y por lo tanto las curvas de crecimiento mostraban una forma inusual que interferiría con el ajuste del modelo.

A estos datos de diámetro y crecimiento en diámetro para cada año por árbol, se le agregaron los datos de edad a la altura del pecho (EDAP), de edad (a la altura del tocón) y de índice de sitio. Los índices de sitio utilizados fueron las alturas medias dominantes a la edad de 75 años, en concordancia con lo planteado por Goya et al. (2005). Estos índices de sitio fueron obtenidos previamente a este trabajo, mediante el análisis de fuste de los mismos ejemplares cuyas muestras se utilizaron en este trabajo para la toma de datos. De ese mismo análisis de fuste se obtuvieron los datos de edad de los árboles al momento del corte y con esos datos se calculó la edad del árbol correspondiente a cada anillo medido.

Se realizaron diversos gráficos (Figura 1 y Figura 2) para cada sitio para ver cómo se comportaban los datos. Del análisis de dichos gráficos se vio que uno de los árboles (LM3.25) presentaba un crecimiento muy atípico, prácticamente constante

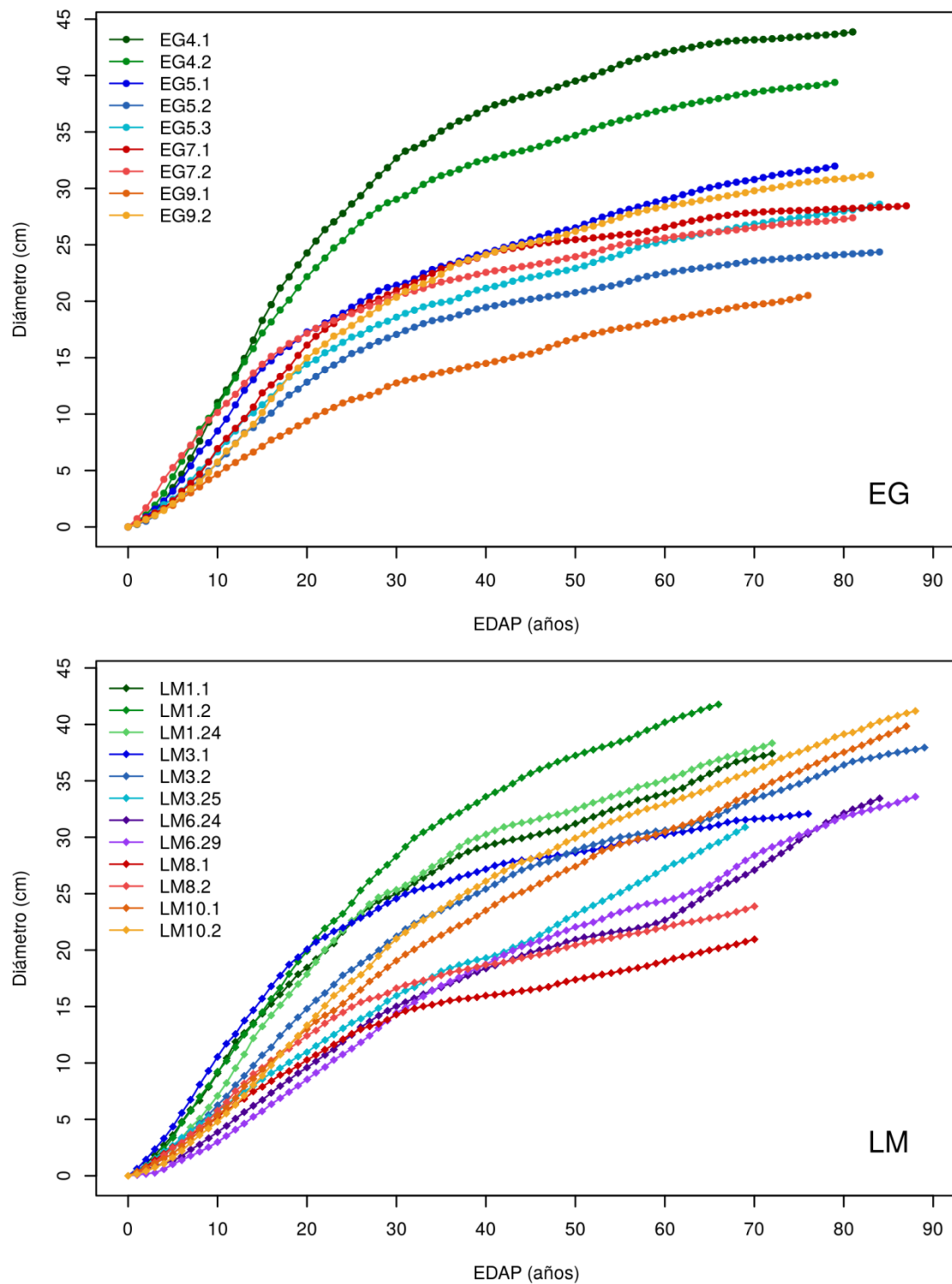


Figura 1. Diámetro a la altura del pecho en función de la edad a la altura del pecho (EDAP) para los individuos dominantes y codominantes muestreados de *Austrocedrus chilensis* en El Guadal (EG) y Loma del Medio (LM), Río Negro, Argentina.

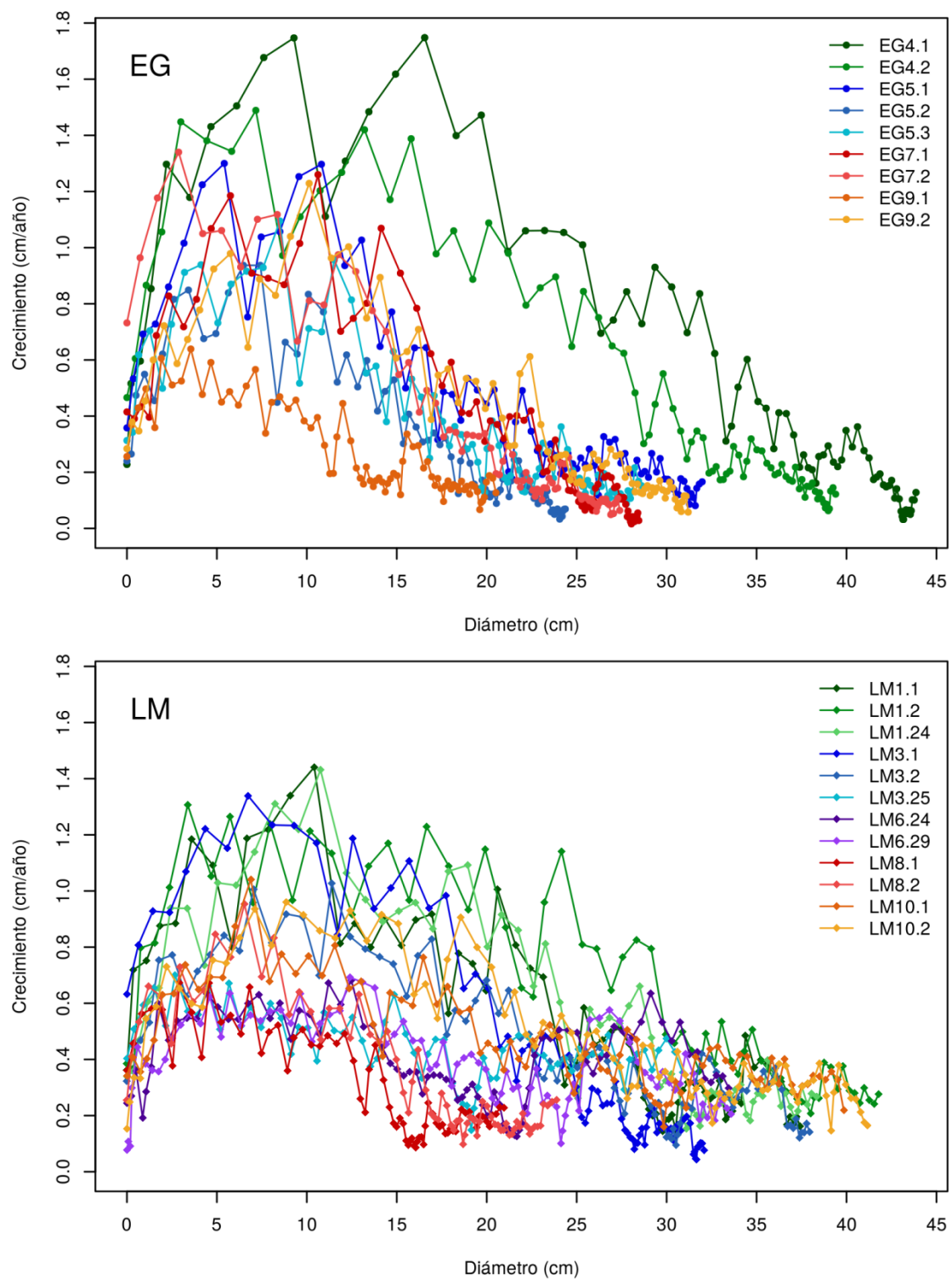


Figura 2. Crecimiento diametral en función del diámetro (ambos a la altura del pecho) para los individuos dominantes y codominantes muestreados de *Austrocedrus chilensis* en El Guadal (EG) y Loma del Medio (LM), Río Negro, Argentina.

(Figura 3), y se decidió eliminarlo por completo de las muestras, para que no interfiriera con el ajuste del modelo. También se vio que los dos árboles procedentes de una de las parcelas (LM6.24 y LM6.29) presentaban un marcado salto en el crecimiento a partir del año 1960 (Figura 4). Es probable que en dicha parcela haya ocurrido algún tipo de liberación de la cual no tenemos registro. Este salto, que no resulta natural, también afectaría el ajuste del modelo, por lo que se eliminaron los datos a partir del año 1960 para dichas muestras.

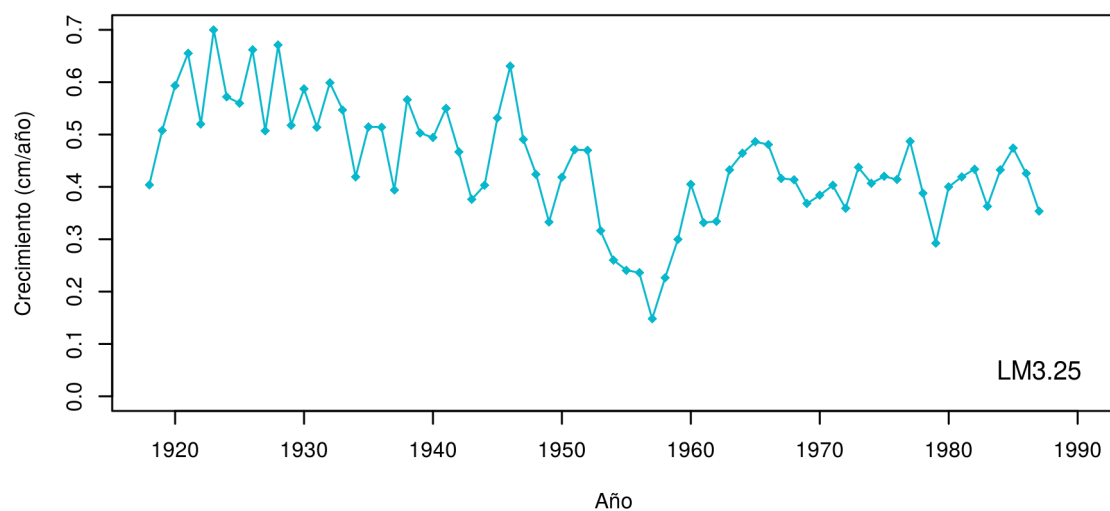


Figura 3. Crecimiento diametral (a la altura del pecho) correspondiente a la muestra LM3.25.

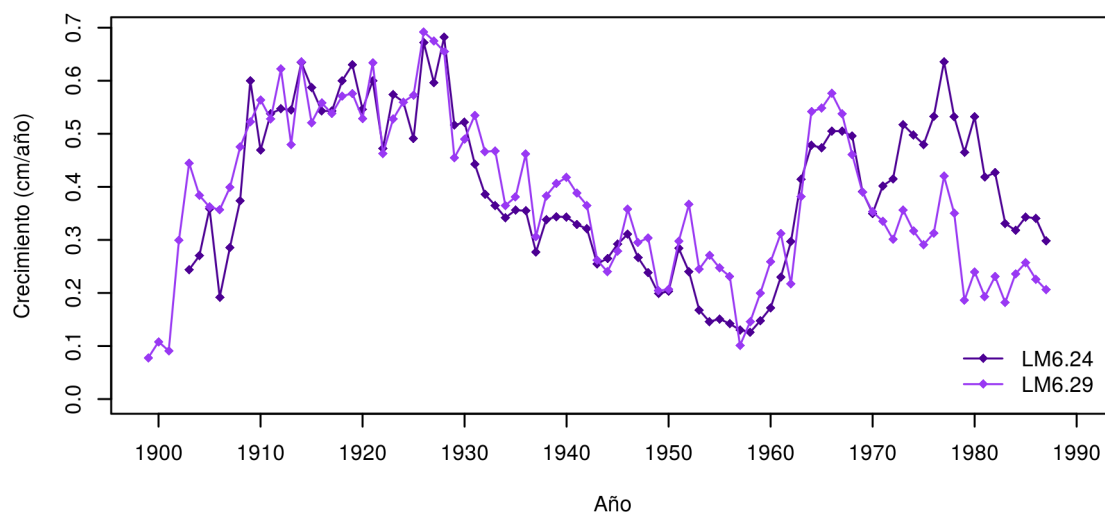


Figura 4. Crecimiento diametral (a la altura del pecho) correspondiente a las muestras LM6.24 y LM6.29.

En ambos sitios, la señal climática observada fue la misma (Figura 5), y por lo tanto las diferencias de crecimiento observadas entre los sitios no se deberían al clima, sino a otros factores como la calidad de sitio o la competencia.

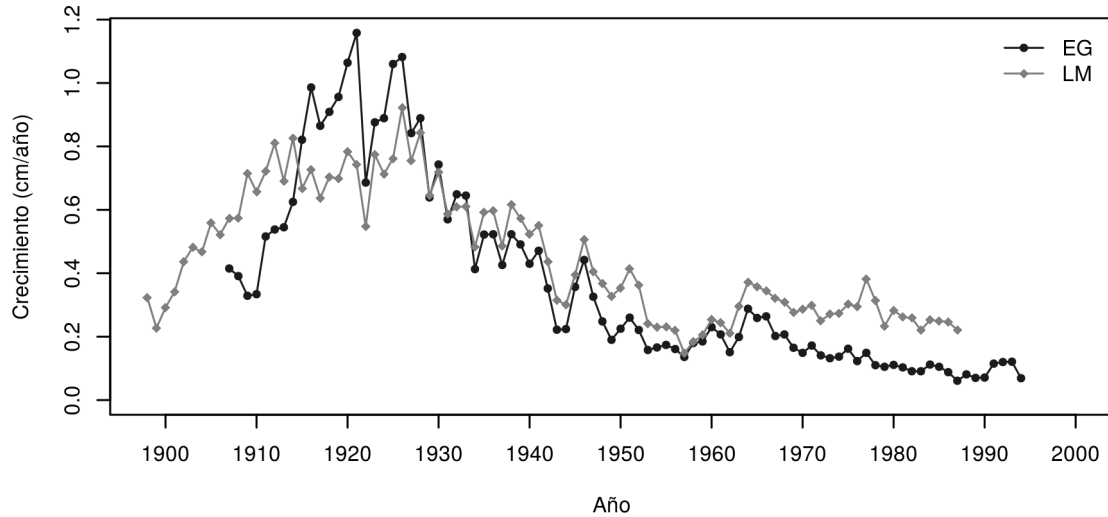


Figura 5. Crecimiento diametral promedio (a la altura del pecho) de ejemplares dominantes y codominantes de *Austrocedrus chilensis* en El Guadal (EG) y Loma del Medio (LM), Río Negro, Argentina.

Modelos empleados

En este trabajo se pensaba utilizar una variante de la función de Chapman-Richards propuesta por Hahn & Leary (1979) para predecir el crecimiento potencial en diámetro de árboles individuales en función del diámetro a la altura del pecho (D) y el índice de sitio (IS):

$$\frac{\Delta D}{\Delta t} = \beta_0 + \beta_1 D^{\beta_2} + \beta_3 IS D^{\beta_4} \quad (1)$$

donde β_i son los parámetros a determinar (todos positivos excepto β_1 que es negativo). Como dicha función no tuvo un ajuste satisfactorio a los datos, se analizaron otras dos funciones alternativas que consideraran el crecimiento como función del diámetro.

La primera variante fue una función de crecimiento propuesta por Birch (1999):

$$\frac{\Delta D}{\Delta t} = \frac{aD(K-D)}{K-D+cD} \quad (2)$$

donde a , c y K son los parámetros (positivos) a determinar. Esta función se caracteriza por ser muy flexible y generar una curva sigmoidea tradicional (en la gráfica de diámetro - edad) con asíntota horizontal K (en este caso el diámetro máximo) y con una tasa de crecimiento relativo máximo a . El parámetro c es un parámetro adicional que determina la asimetría de la curva. Para el caso de este trabajo se incorporó un parámetro adicional b (positivo) para desplazar la curva y que de este modo existiera un crecimiento no nulo cuando el diámetro fuera 0, que es lo que ocurre con el diámetro a la altura del pecho. La función utilizada fue:

$$\frac{\Delta D}{\Delta t} = \frac{a(D+b)(K-(D+b))}{K-(D+b)+c(D+b)} \quad (3)$$

donde ahora el diámetro máximo no es representado por K , si no por $K - b$.

La segunda variante fue una función de crecimiento basada en una función propuesta por Zeide (1993) y Vanclay (1994) como una de las funciones más prometedoras para la modelización del crecimiento de árboles individuales:

$$\frac{\Delta D}{\Delta t} = \frac{\beta_0 D^{\beta_1}}{e^{\beta_2 D^k}} \quad (4)$$

donde β_i son los parámetros (positivos) a determinar y k vale típicamente 1 o 2 (Vanclay 1994). En este caso se alteró la función original, de modo que se adaptara adecuadamente a los datos. El parámetro β_1 se fijó en 1, ya que ciertos valores del mismo podrían generar curvas con más de un punto de inflexión y eso no sería deseable. El exponente k (que es el responsable de la asimetría de la curva) se fijó arbitrariamente en un valor de 1,5 para este estudio, ya que con este valor la función reflejaba mejor la forma de los datos, en comparación con los valores propuestos originalmente por los autores. Se decidió usar un valor fijo de k , en lugar de

incorporarlo como parámetro, para simplificar el ajuste del modelo. Además se incorporó un nuevo parámetro b (positivo) para desplazar la curva, al igual que en el modelo anterior. Por lo tanto la función utilizada fue:

$$\frac{\Delta D}{\Delta t} = \frac{a(D+b)}{e^{c(D+b)^{1.5}}} \quad (5)$$

donde a , b y c son los parámetros (positivos) a determinar. Cabe destacar que este modelo propuesto no genera una curva sigmoidea típica (con asíntota horizontal) en las gráficas de diámetro - edad.

Software utilizado para la estimación de los parámetros

Para el ajuste de los modelos y la estimación de los parámetros se utilizó una regresión no lineal de cuadrados mínimos con el comando nls (Nonlinear Least Squares) del software libre de estadística computacional R (Fox & Wisberg, 2010). Dicho comando requiere, entre otras cosas, de la introducción de parámetros iniciales a partir de los cuales el algoritmo comenzará a realizar los cálculos. La buena elección de estos parámetros iniciales es fundamental para la convergencia del algoritmo y el éxito del ajuste.

Para la estimación de dichos parámetros iniciales, se utilizó un método gráfico mediante el software libre de matemática dinámica GeoGebra. En el mismo se introdujeron algunos datos a modelar y la función matemática que representaba el modelo en cuestión, con cada uno de sus parámetros representados mediante deslizadores que permiten variar sus valores y visualizar el consecuente cambio en la función de manera dinámica e inmediata. De tal modo se logró, por un lado, comprender qué papel jugaba cada parámetro en la forma de la función y, por otro lado, estimar un conjunto de parámetros iniciales que le dieran a la función una forma aproximada a los datos a modelar.

Análisis de los modelos por árbol individual

El modelo de Birch modificado (ecuación (3)) y el modelo nuevo (ecuación (5)) se analizaron para ver su desempeño en el modelado de los datos para cada árbol individual con el objetivo de ver cuál era más adecuado, para luego proceder a incorporar el índice de sitio a los parámetros del modelo con mejor desempeño.

En ambos casos, para la estimación de los parámetros iniciales con GeoGebra se utilizaron datos promedio por EDAP de diámetro y crecimiento diametral para cada sitio. Estos datos se aproximaron visualmente con cada uno de los modelos con dicho programa como se explicó previamente y se obtuvo una serie de parámetros iniciales para cada modelo. Luego se procedió a ajustar los parámetros para cada modelo para cada árbol individual, mediante el comando nls del programa R, obteniendo así dos curvas por árbol (una por modelo) (Figura 6 y Figura 8). También se analizaron los residuos de cada uno de los modelos, por árbol (Figura 7 y Figura 9). A esta altura del trabajo se vio que el modelo nuevo (ecuación (5)) representaba mejor el crecimiento de los árboles estudiados, por lo que en adelante se continuó trabajando sólo con dicha ecuación.

Normalización de datos y modelado por sitio

Una vez definida la ecuación general que se utilizaría para modelizar el crecimiento en función del diámetro, se procedió a estudiar cómo variaba el crecimiento entre los dos sitios y tratar de obtener un par de curvas que representaran dichos crecimientos. En ese sentido se observó que en las gráficas de crecimiento - diámetro, los diferentes árboles del mismo sitio presentaban distinto rango de diámetro y de crecimiento, pero la forma general de la curva era similar (Figura 2). Este mismo comportamiento se observó en las gráficas de diámetro - EDAP por sitio (Figura 1), las cuales presentaban curvas de formas similares pero en las cuales cada árbol

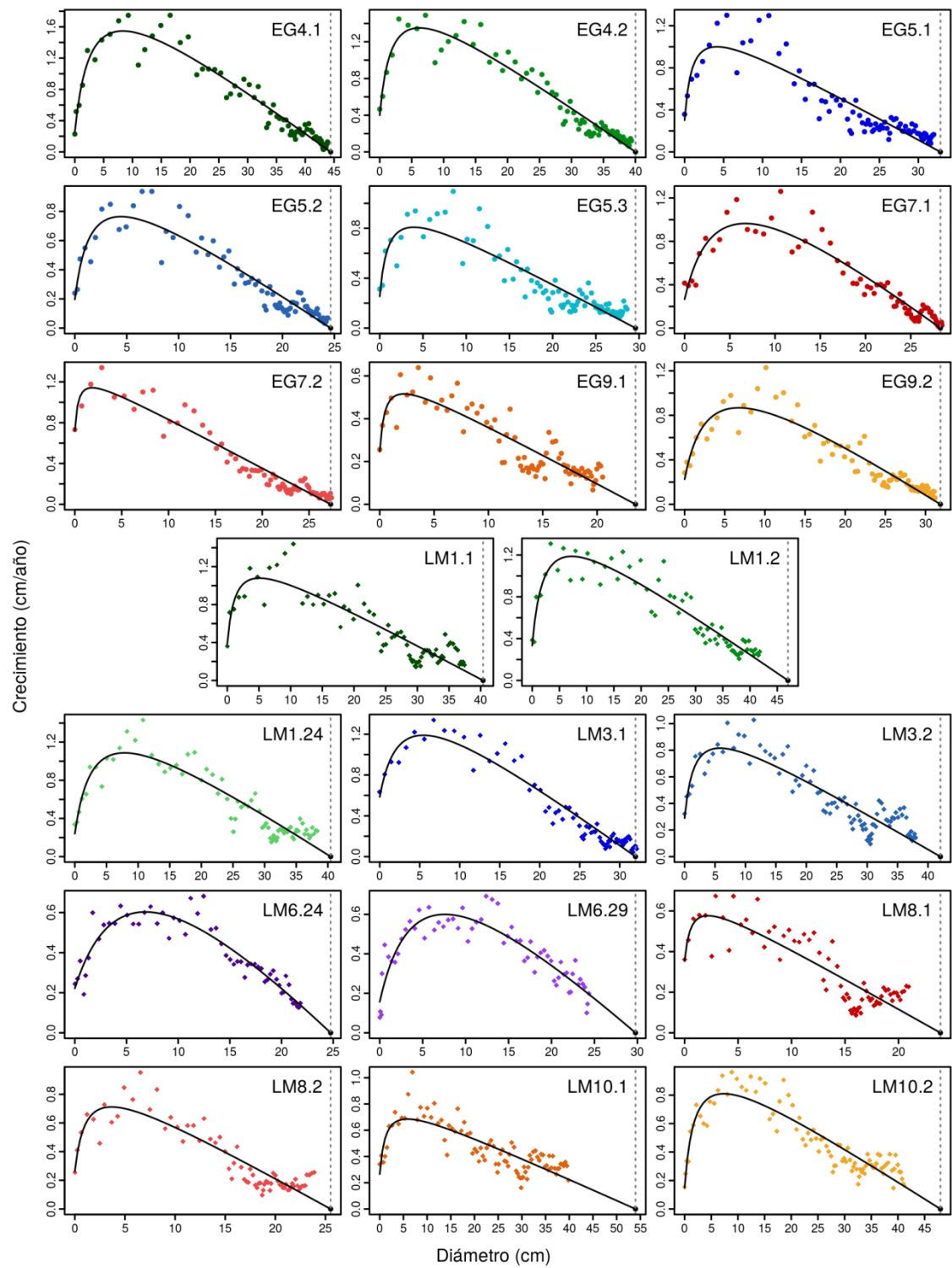


Figura 6. Modelo propuesto por Birch modificado (ecuación (3)), ajustado individualmente para cada muestra. La línea punteada marca el diámetro máximo predicho por este modelo para cada individuo.

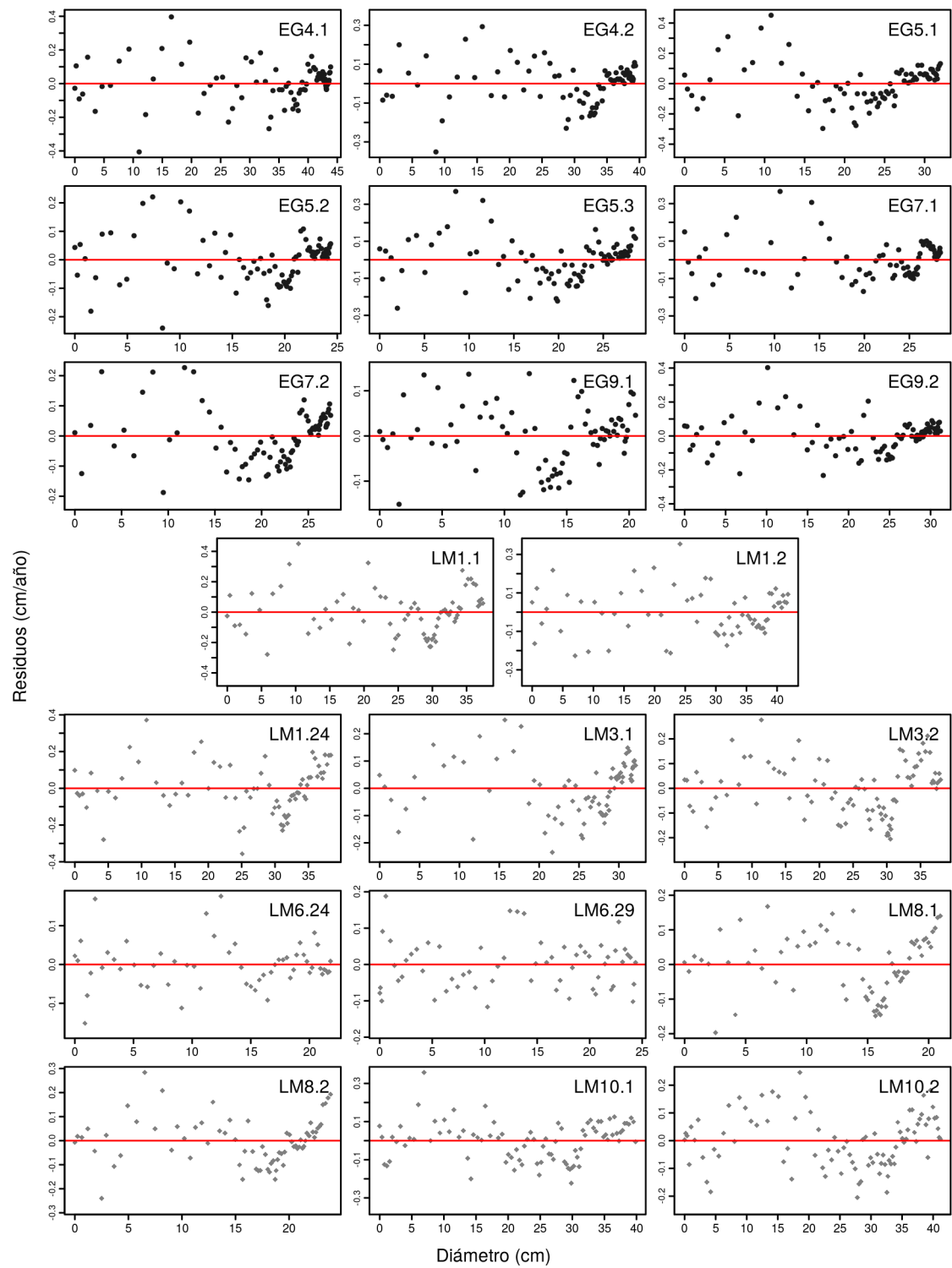


Figura 7. Residuos correspondientes al modelo propuesto por Birch modificado (ecuación (3)), ajustado individualmente para cada muestra.

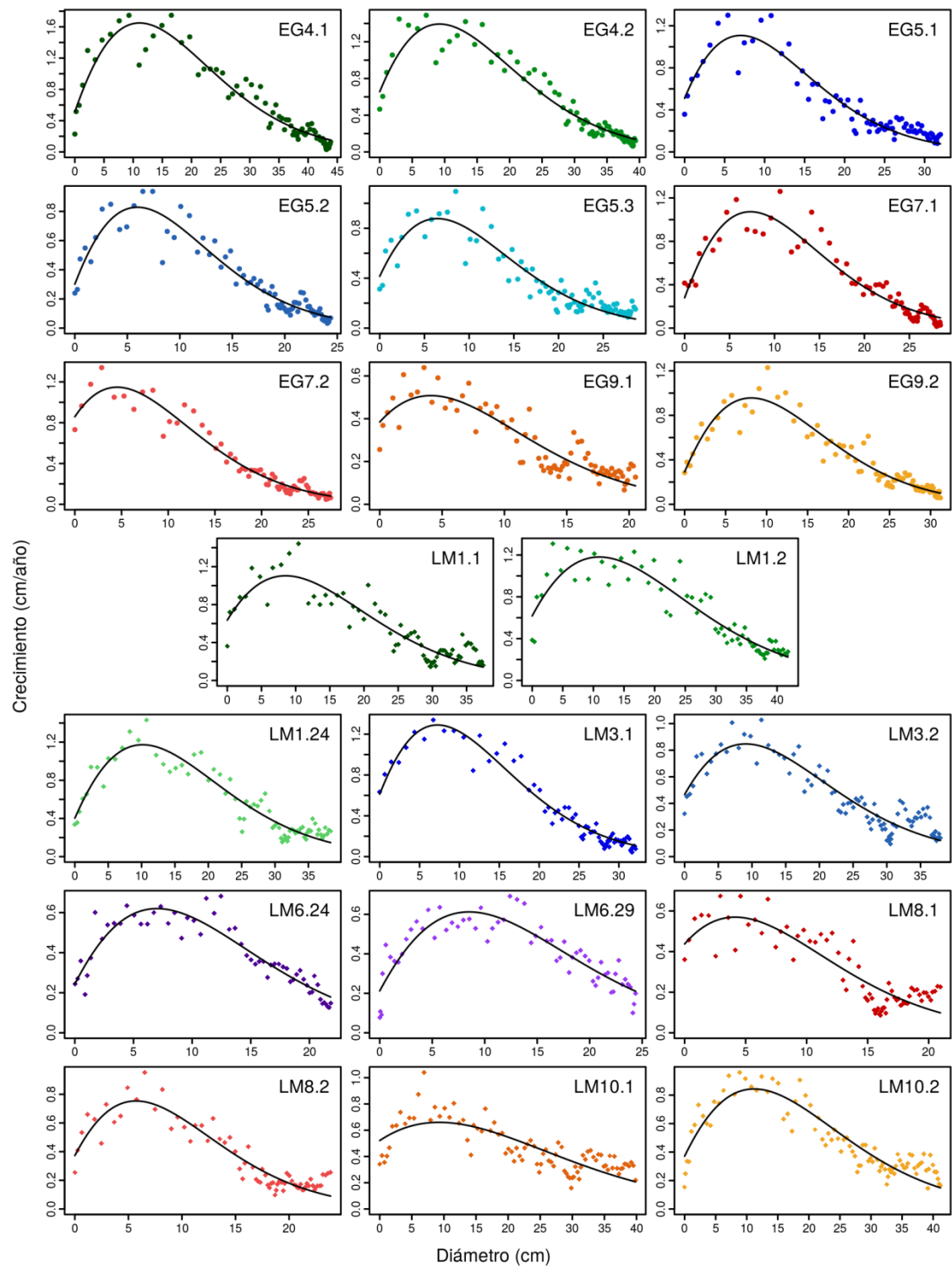


Figura 8. Modelo nuevo (ecuación (5)) ajustado individualmente para cada muestra.

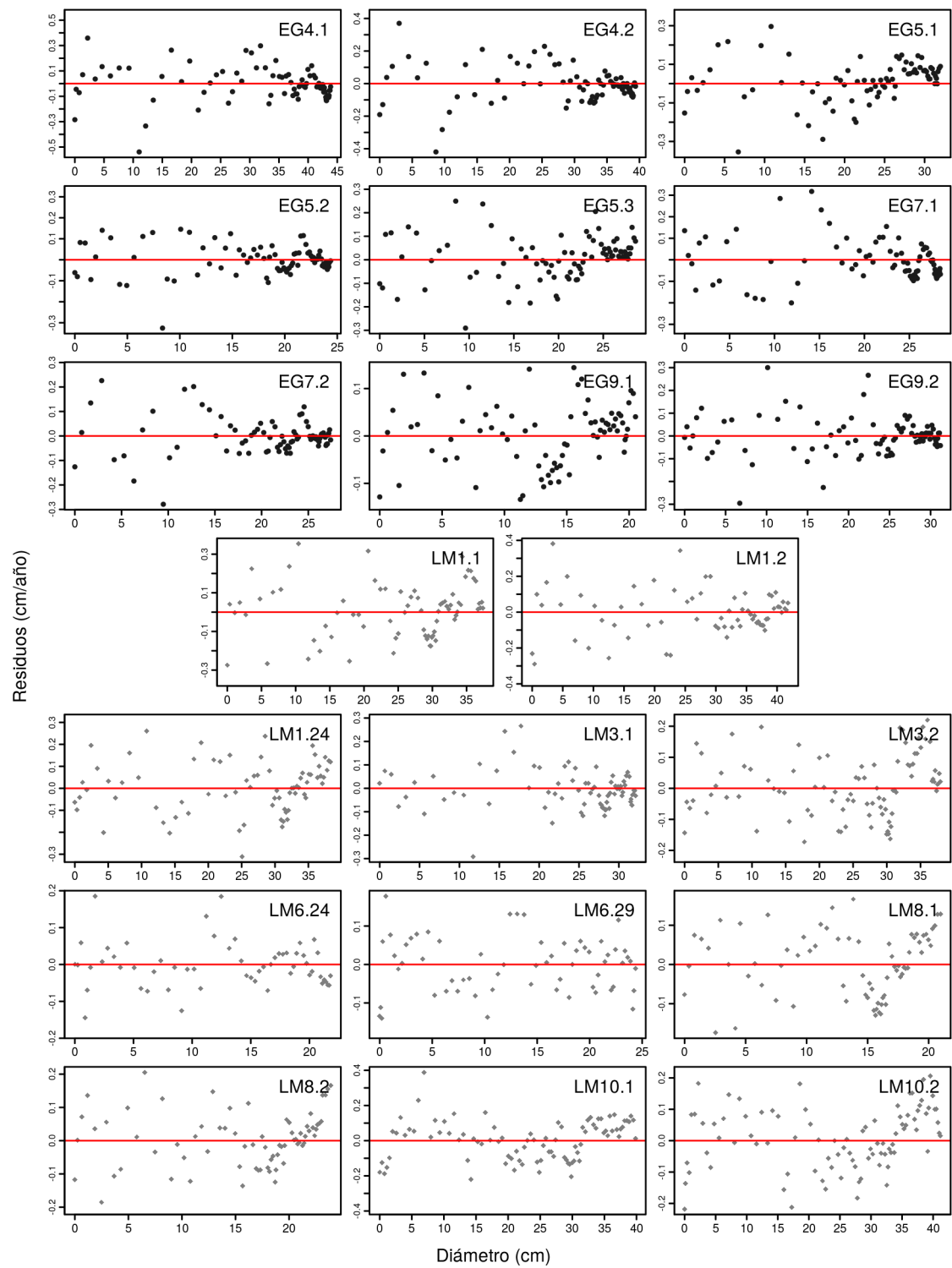


Figura 9. Residuos correspondientes al modelo nuevo (ecuación (5)) ajustado individualmente para cada muestra.

alcanzaba un diámetro distinto. Este comportamiento de las curvas de crecimiento - diámetro hizo pensar en realizar una normalización de los datos, de manera que todos los árboles tuvieran un rango similar de diámetro y de crecimiento, para que pudieran modelizarse los datos de un mismo sitio con una única curva.

Para esta normalización se dividió a los diámetros y a los crecimientos por un diámetro de referencia a una edad arbitraria. En este caso se utilizó el diámetro a la edad de 75 años (D_{75}) para cada árbol. Se eligió la edad de 75 años porque también es la edad de referencia que se empleó para el cálculo de los IS que se utilizaron en este trabajo. Estos datos de D_{75} no estaban disponibles para tres de los árboles (LM1.2, LM6.24 y LM6.29) debido al recorte que se había realizado de los datos previamente. Para estos ejemplares se utilizó el D_{75} predicho por el modelo ajustado para cada árbol (Figura 10).

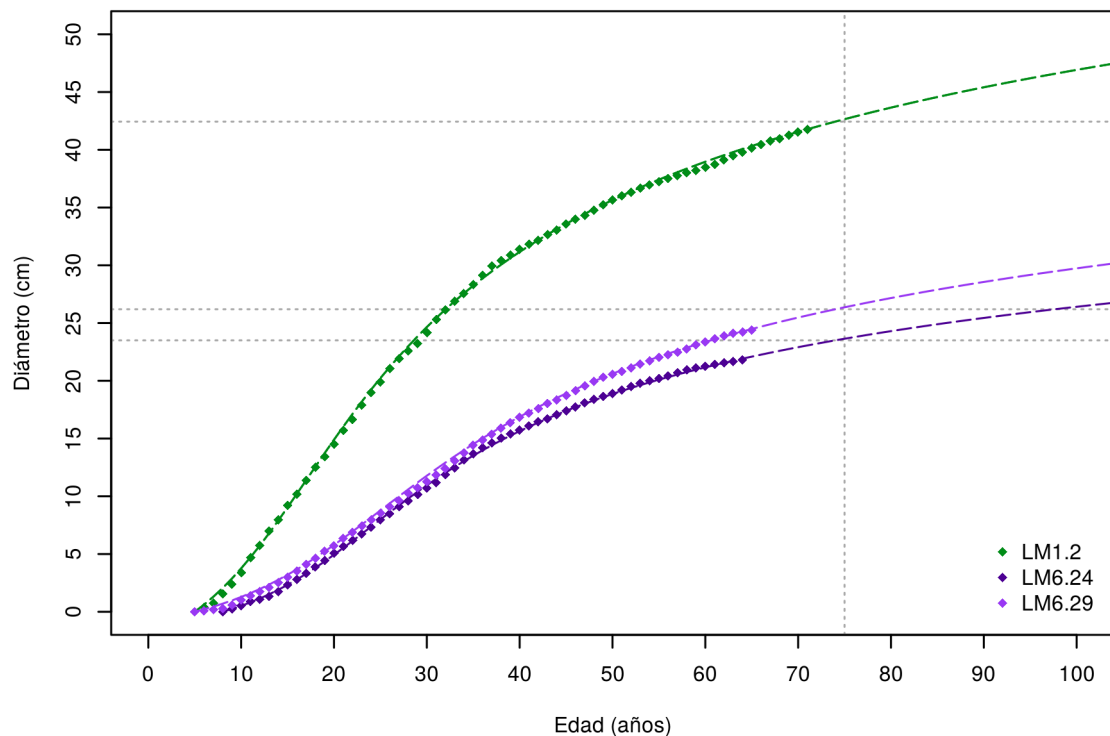


Figura 10. Diámetro a la altura del pecho predicho por el modelo nuevo (ecuación (5)) ajustado de manera individual para los ejemplares LM1.2, LM6.24, LM6.29. Los puntos simbolizan los datos medidos y las líneas de trazos discontinuos la predicción del modelo. Las intersecciones de las líneas de puntos (horizontales y verticales) marcan los respectivos diámetros predichos para la edad (a la altura del tocón) de 75 años (D_{75}).

Una vez obtenidos todos los valores de D_{75} para cada árbol, se dividieron los datos de diámetro y crecimiento por su respectivo D_{75} calculando así datos de diámetro normalizado (D_{norm}) y crecimiento normalizado ($\Delta D/\Delta t_{norm}$) para cada árbol. Estos nuevos datos presentaban curvas mucho más similares entre los árboles dentro de un mismo sitio, tanto en las curvas de diámetro - crecimiento (normalizados) (Figura 11), como en las curvas de diámetro normalizado - edad (Figura 12).

Para la modelización de estos datos normalizados, fue necesario utilizar una nueva ecuación, obtenida a partir de la ecuación (5) por operaciones elementales (ver apéndice A), que representara el crecimiento normalizado en función del diámetro normalizado:

$$\frac{\Delta D}{\Delta t_{norm}} = \frac{a(D_{norm} + b')}{e^{c'(D_{norm} + b')^{1.5}}} \quad (6)$$

con

$$b' = \frac{b}{D_{75}} \quad c' = c(D_{75})^{1.5}$$

Para la estimación de los parámetros iniciales con GeoGebra, se promediaron los datos de D_{norm} y $\Delta D/\Delta t_{norm}$ por clases de D_{norm} (en intervalos de 0,1) para cada sitio por separado. Estos datos se aproximaron visualmente con el modelo mediante dicho programa como se explicó previamente y se obtuvo una serie de parámetros iniciales. Estos parámetros iniciales se utilizaron para ajustar los parámetros del modelo normalizado (ecuación (6)) para cada sitio utilizando el comando nls en R. De esta manera se obtuvieron dos modelos normalizados (uno por sitio) (Figura 13) a los cuales también se les analizaron los residuos (Figura 14). Estos modelos normalizados pudieron ser “desnormalizados” utilizando el procedimiento inverso que se usó para la normalización. De este modo se obtuvo un modelo de crecimiento diametral en función

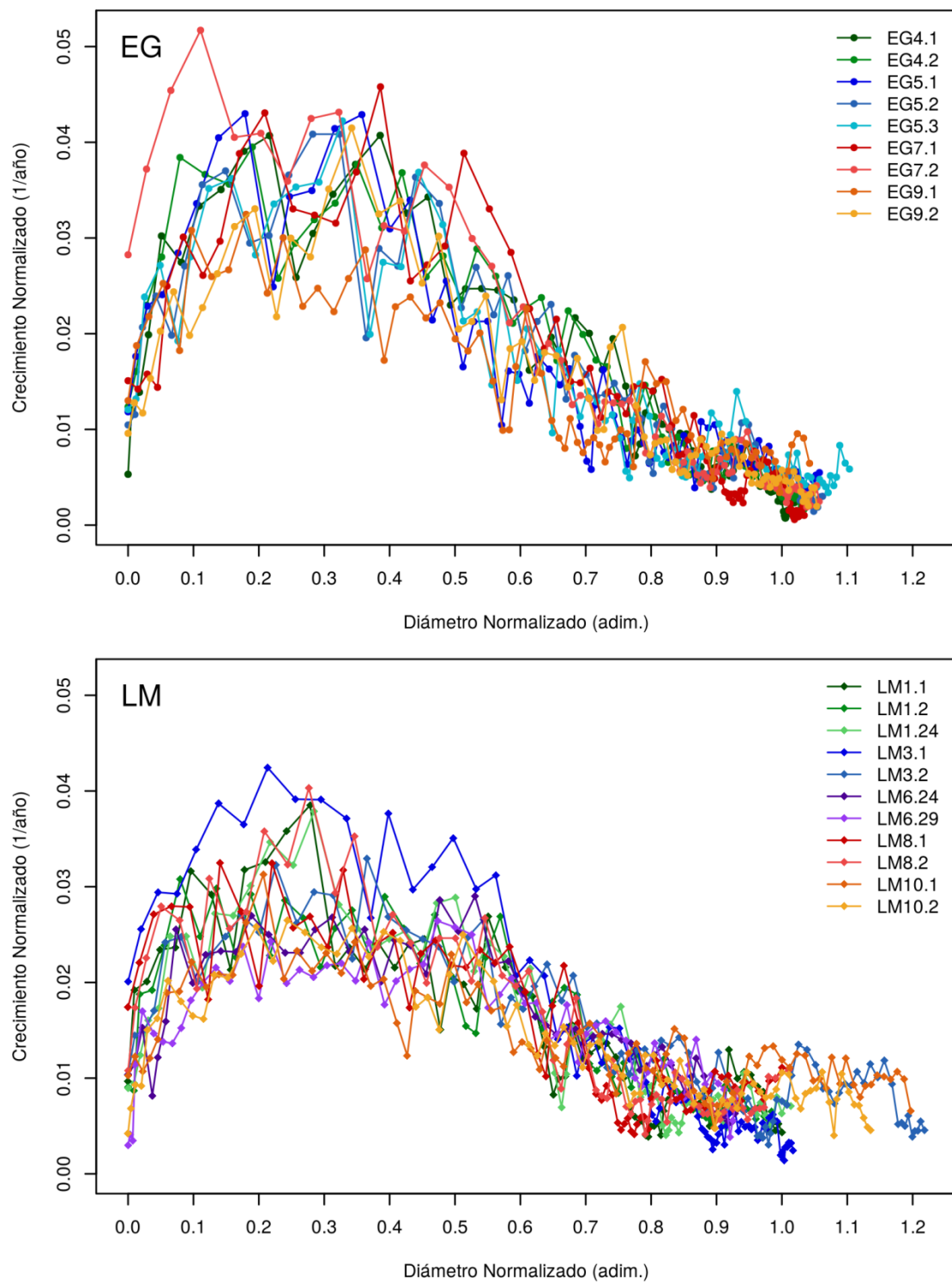


Figura 11. Crecimiento diametral normalizado en función del diámetro normalizado (ambos a la altura del pecho) para individuos de *Austrocedrus chilensis* en El Guadal (EG) y Loma del Medio (LM), Río Negro, Argentina. Ambas normalizaciones se obtuvieron dividiendo los datos correspondientes (de crecimiento diametral y de diámetro) por el diámetro a la edad de 75 años (D_{75}) de cada individuo.

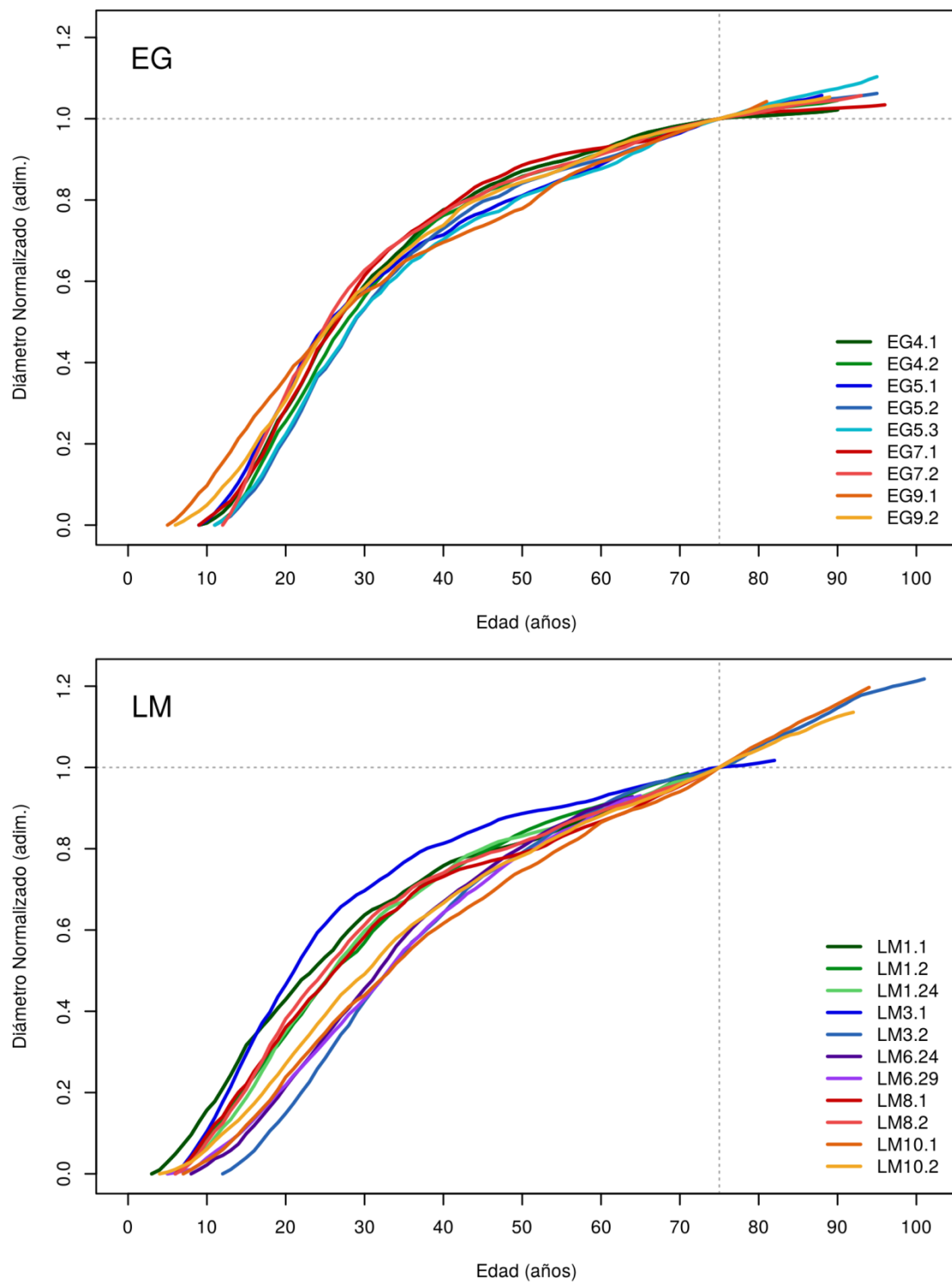


Figura 12. Diámetro (a la altura del pecho) normalizado en función de la edad (a la altura del tocón para individuos de *Austrocedrus chilensis* en El Guadal (EG) y Loma del Medio (LM), Río Negro, Argentina. La normalización se obtuvo dividiendo los datos de diámetro por el diámetro a la edad de 75 años (D_{75}) de cada individuo (por ende, en esa intersección convergen todas las curvas).

del diámetro y el D_{75} que tuviera como parámetros los mismos parámetros a , b' y c' del modelo anterior:

$$\frac{\Delta D}{\Delta t} = \frac{a(D + b'D_{75})}{e^{\frac{c'}{(D_{75})^{1.5}}(D + b'D_{75})^{1.5}}} \quad (7)$$

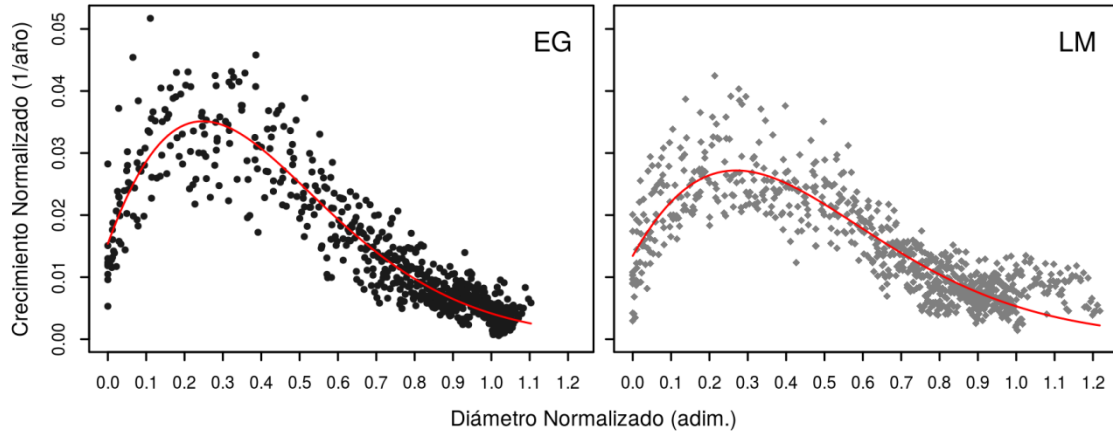


Figura 13. Modelo normalizado (ecuación (6)) ajustado por sitio para individuos de *Austrocedrus chilensis* en El Guadal (EG) y Loma del Medio (LM), Río Negro, Argentina.

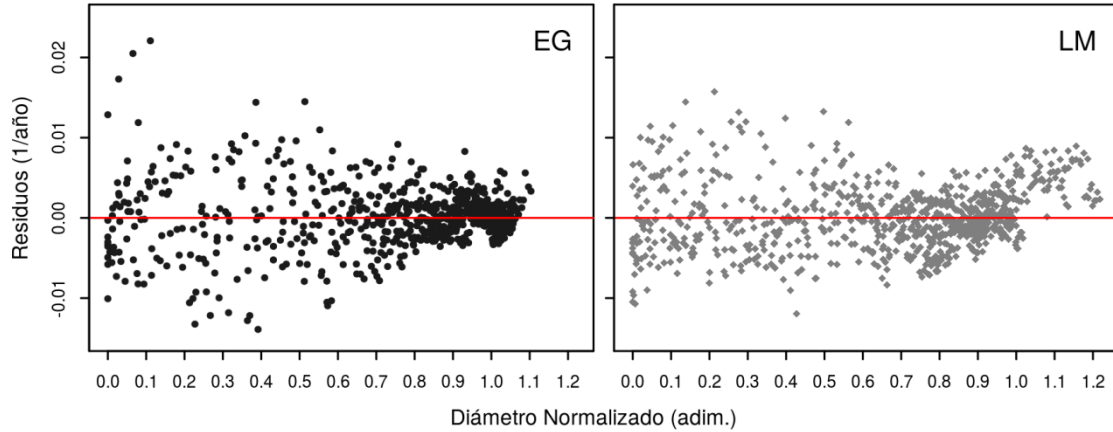


Figura 14. Residuos correspondientes al modelo normalizado (ecuación (6)) ajustado por sitio para individuos de *Austrocedrus chilensis* en El Guadal (EG) y Loma del Medio (LM), Río Negro, Argentina.

Incorporación del índice de sitio al modelo

Una vez que se obtuvieron los parámetros a , b' y c' para cada sitio, se procedió a analizar cómo variaban dichos parámetros en función del IS . Como sólo se tenían dos

datos para cada parámetro, lo más simple hubiera sido aproximar con rectas, pero esto hubiera implicado tener dos sub-parámetros (pendiente y ordenada al origen) por cada parámetro, ampliando considerablemente la cantidad de parámetros del modelo final. Para el parámetro b' , que presentaba una relación positiva con el IS , se trataba de una recta con ordenada al origen muy cercana a 0, por lo que se propuso una recta que pasara por el origen (y por lo tanto sólo tuviera un parámetro: la pendiente). Para los parámetros a y c' , que presentaban una relación negativa con el IS , se buscaron otras funciones decrecientes (del tipo k/x y $\exp(-k \cdot x)$) para obtener una relación con un solo parámetro y que además no predijera valores negativos de a y c' para valores grandes de IS (cosa que sí hubiese ocurrido con una aproximación lineal). De esta manera, los parámetros a , b' y c' como función del IS resultaron:

$$a = e^{-a''IS} \quad b' = b''IS \quad c' = \frac{c''}{IS}$$

Modelo completo

Con la incorporación del IS a los parámetros del modelo por sitio (ecuación (7)) se obtuvo un nuevo modelo de crecimiento en función del diámetro, IS y D_{75} , que podría ser utilizado para analizar los datos originales en conjunto, y obtener una terna única de parámetros (a'' , b'' y c''), independientes del sitio:

$$\frac{\Delta D}{\Delta t} = \frac{e^{-a''IS} (D + b''IS D_{75})}{e^{\frac{c''}{IS(D_{75})^{1.5}} (D + b''IS D_{75})^{1.5}}} \quad (8)$$

Para la estimación de los parámetros iniciales de este modelo, simplemente se promediaron los valores de a'' , b'' y c'' para cada sitio, obtenidos a partir de a , b' y c' . Con estos parámetros iniciales se ajustaron los parámetros finales mediante el comando `nls` de R. De este modo se obtuvo un único modelo que predice el crecimiento en cualquiera de los dos sitios.

Crecimiento potencial

El último paso del trabajo fue convertir el modelo de crecimiento por sitio (ecuación (7)) y el modelo de crecimiento general (ecuación (8)) en modelos de crecimiento potencial en diámetro ($\Delta D/\Delta t_{pot}$), que era el objetivo de este trabajo. Para esto, como el crecimiento individual de cada árbol dentro de un mismo sitio está determinado en dichas ecuaciones por el D_{75} , se pensó en determinar un diámetro potencial a la edad de 75 años (D_{75pot}), de manera que el D_{75} de cada árbol se obtenga al multiplicar el D_{75pot} por un factor de competencia (FC) que tome valores entre 0 (máxima competencia) y 1 (sin competencia). Es decir:

$$D_{75} = FC D_{75pot}$$

El D_{75pot} debería ser un valor de D_{75} más grande que los presentes en el trabajo, pero relacionado con éstos. Idealmente el D_{75pot} debería ser el D_{75} de árboles completamente libres de competencia, pero esto no se puede determinar con los datos disponibles (y difícilmente sea determinable de manera directa en la práctica). Por lo tanto, para la determinación del D_{75pot} en este trabajo se supuso que el D_{75} seguía una distribución normal en los árboles dominantes y codominantes, y se analizó su media y su varianza por sitio. Con el programa estadístico R se realizó una prueba de F para analizar si la varianza era significativamente diferente entre ambos sitios. También, con el mismo programa, se realizó una prueba de t de Student para ver si los valores de las medias diferían significativamente entre sitios. Como ambas pruebas no arrojaron una diferencia significativa, se procedió a calcular un único D_{75pot} para ambos sitios. El mismo se calculó con un valor de t de Student correspondiente al percentil de 97,5 ($t_{97,5}$) con 19 grados de libertad y en base a la media y al desvío estándar de la media (SD), según la siguiente fórmula:

$$D_{75pot} = \overline{D_{75}} + t_{97,5} SD$$

De esta manera, los modelos de crecimiento potencial, obtenidos a partir de las ecuaciones (7) y (8) resultaron:

$$\frac{\Delta D}{\Delta t_{pot}} = \frac{a \left(D + b' D_{75 pot} \right)}{e^{\frac{c'}{(D_{75 pot})^{1,5}} (D + b' D_{75 pot})^{1,5}}} \quad (9)$$

$$\frac{\Delta D}{\Delta t_{pot}} = \frac{e^{-a'' IS} \left(D + b'' IS D_{75 pot} \right)}{e^{\frac{c''}{IS (D_{75 pot})^{1,5}} (D + b'' IS D_{75 pot})^{1,5}}} \quad (10)$$

El factor de competencia no se pudo calcular en este trabajo, ya que los datos con que se contaba procedían sólo de árboles dominantes y codominantes, en vez de la totalidad de los árboles de las parcelas de muestreo y por lo tanto no era posible estimar la competencia. De todos modos, ello no formaba parte de los objetivos del trabajo.

Resultados

Datos

Ambos sitios presentaron patrones de crecimiento distintos. Los ejemplares del sitio EG presentaron un crecimiento máximo en diámetro (sin corteza) entre 1,75 y 0,64 cm/año (con una media de 1,23 cm/año) entre las edades de 13 y 23 años. Para este sitio, los crecimientos en diámetro (sin corteza) al momento del corte variaron entre 0,16 y 0,03 cm/año (con una media de 0,1 cm/año) con edades entre 81 y 96 años.

Los ejemplares del sitio LM presentaron un crecimiento máximo en diámetro (sin corteza) entre 1,44 y 0,67 cm/año (con una media de 1,02 cm/año) entre las edades de 10 y 33 años. Para dicho sitio, los crecimientos en diámetro (sin corteza) al

momento del corte se encontraron entre 0,29 y 0,08 cm/año (con una media de 0,2 cm/año) con edades entre 71 y 101 años.

Los índices de sitio utilizados en este trabajo fueron de 15,4 para EG y de 19,6 para LM, correspondientes a la altura media de los árboles dominantes y codominantes (medidas en m) de los respectivos sitios. Se descartó la posibilidad de considerar diferentes calidades de sitio dentro de cada sitio debido al reducido tamaño de las muestras.

Modelos por árbol individual

Los parámetros del modelo de Birch modificado (ecuación (3)) ajustados para cada árbol individual se detallan en la Tabla 1. Los gráficos de dichos modelos y los de sus residuos pueden observarse en las Figura 6 y Figura 7 respectivamente.

Tabla 1. *Parámetros correspondientes al ajuste del modelo de Birch modificado (ecuación (3)) por árbol individual.*

Árbol	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>K</i>	Árbol	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>K</i>
EG4.1	0,9266	0,3095	17,4420	44,7156	LM1.1	1,4882	0,3567	42,1985	40,7314
EG4.2	1,2466	0,4056	26,0808	40,4268	LM1.2	0,9535	0,4378	26,7441	47,4032
EG5.1	1,7261	0,2267	42,9430	33,0545	LM1.24	0,6495	0,4318	15,5337	40,8701
EG5.2	0,8586	0,2764	18,4131	24,9171	LM3.1	0,9717	0,8979	17,4950	32,8727
EG5.3	1,3829	0,2399	37,7484	29,8263	LM3.2	0,8875	0,4399	33,6591	42,4773
EG7.1	0,5208	0,6060	8,7027	28,8827	LM6.24	0,2490	1,0920	5,1378	25,8441
EG7.2	7,4175	0,2135	152,8942	27,5160	LM6.29	0,2677	0,6827	7,2211	30,4669
EG9.1	2,1236	0,1896	78,8789	23,7281	LM8.1	2,2241	0,3207	75,1697	24,2390
EG9.2	0,5351	0,4994	12,0261	32,3590	LM8.2	1,1726	0,3059	30,5102	25,8244
					LM10.1	0,9608	0,3976	59,8067	54,3783
					LM10.2	0,6748	0,2558	28,5094	48,2168

Los parámetros del modelo nuevo (ecuación (5)) ajustados por árbol individual se detallan en la Tabla 2. Los gráficos de dichos modelos y los de sus residuos pueden verse en las Figura 8 y Figura 9 respectivamente.

Los errores absolutos medios correspondientes a ambos modelos se pueden observar en la Tabla 3.

Tabla 2. Parámetros correspondientes al ajuste del modelo nuevo (ecuación (5)) por árbol individual.

Árbol	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	Árbol	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
EG4.1	0,2412	2,2240	0,0137	LM1.1	0,1672	4,3349	0,0145
EG4.2	0,2170	3,3129	0,0151	LM1.2	0,1472	4,6749	0,0108
EG5.1	0,2282	2,4418	0,0229	LM1.24	0,1831	2,3197	0,0151
EG5.2	0,2175	1,4690	0,0330	LM3.1	0,2545	2,6357	0,0215
EG5.3	0,1948	2,3336	0,0257	LM3.2	0,1240	4,2431	0,0137
EG7.1	0,2458	1,1778	0,0269	LM6.24	0,1352	1,9270	0,0250
EG7.2	0,2577	4,1522	0,0261	LM6.29	0,1137	1,9699	0,0196
EG9.1	0,1237	3,9027	0,0294	LM8.1	0,1346	4,1101	0,0282
EG9.2	0,1920	1,5819	0,0221	LM8.2	0,1851	2,2205	0,0299
				LM10.1	0,0667	10,0370	0,0079
				LM10.2	0,1109	3,6238	0,0117

Tabla 3. Errores absolutos medios (cm/año) para el modelo de Birch modificado (ecuación (3)) y el modelo nuevo (ecuación (5)) ajustados por árbol individual. Con * se marca el menor error correspondiente a cada árbol.

Árbol	Error (cm/año)		Árbol	Error (cm/año)	
	Mod. Birch	Mod. Nuevo		Mod. Birch	Mod. Nuevo
EG4.1	0,0561*	0,0750	LM1.1	0,0900*	0,0922
EG4.2	0,0611	0,0603*	LM1.2	0,0823	0,0734*
EG5.1	0,0740	0,0644*	LM1.24	0,0816	0,0773*
EG5.2	0,0452	0,0386*	LM3.1	0,0732	0,0499*
EG5.3	0,0627	0,0522*	LM3.2	0,0728	0,0693*
EG7.1	0,0671	0,0663*	LM6.24	0,0249*	0,0311
EG7.2	0,0588	0,0333*	LM6.29	0,0455*	0,0573
EG9.1	0,0389*	0,0428	LM8.1	0,0629*	0,0688
EG9.2	0,0553	0,0420*	LM8.2	0,0531	0,0513*
			LM10.1	0,0741*	0,0892
			LM10.2	0,0707*	0,0760

Modelos por sitio

Para la normalización de los datos se utilizaron los datos de D_{75} obtenidos de las mediciones o de las proyecciones utilizando el modelo nuevo (ecuación (5)), según se aclaró previamente. Dichos datos se pueden ver en la Tabla 4.

Tabla 4. Datos de diámetro a la edad de 75 años (D_{75}) utilizados para la normalización de los datos. Los datos marcados con * fueron calculados mediante la proyección del modelo nuevo (ecuación (5)) ajustado por árbol individual, ya que los mismos no se encontraban disponibles.

Árbol	D_{75} (cm)	Árbol	D_{75} (cm)
EG4.1	42,928	LM1.1	37,417
EG4.2	37,694	LM1.2	42,439*
EG5.1	30,240	LM1.24	37,820
EG5.2	22,939	LM3.1	31,546
EG5.3	25,929	LM3.2	31,166
EG7.1	27,512	LM6.24	23,500*
EG7.2	25,915	LM6.29	26,193*
EG9.1	19,680	LM8.1	20,731
EG9.2	29,618	LM8.2	23,629
		LM10.1	33,292
		LM10.2	36,249

Los parámetros para los modelos por sitio, obtenidos para el modelo normalizado (ecuación (6)), pueden verse en la Tabla 5. Estos parámetros son los mismos que se usan para el modelo de crecimiento por sitio (ecuación (7)) y para el modelo de crecimiento potencial por sitio (ecuación (9)).

Tabla 5. Parámetros correspondientes al modelo normalizado (ecuación (6)), modelo de crecimiento por sitio (ecuación (7)) y modelo de crecimiento potencial por sitio (ecuación (9)).

Sitio	a	b'	c'
EG	0,20902	0,07976	3,55996
LM	0,14167	0,10465	2,91608

La Figura 13 muestra los gráficos de los modelos normalizados, correspondientes a la ecuación (6), para cada sitio. En la Figura 14 se pueden ver los gráficos de los residuos de dichos modelos.

Modelo completo

En el caso del modelo general, correspondiente a la ecuación (8), sus parámetros obtenidos se detallan en la Tabla 6. Dichos parámetros son los mismos que se utilizan para el modelo de crecimiento potencial general, correspondiente a la ecuación (10).

Tabla 6. *Parámetros correspondientes al modelo de crecimiento general (ecuación (8)) y al modelo de crecimiento potencial general (ecuación (10)).*

a''	b''	c''
0,10059	0,00530	55,68401

En la Figura 15 se pueden ver los gráficos de crecimiento-diámetro para cada árbol individual obtenidos mediante el modelo completo. Los gráficos de los respectivos residuos se presentan en la Figura 16. Los errores absolutos medios para este modelo se pueden ver en la Tabla 7.

Tabla 7. *Errores absolutos medio (cm/año) correspondientes al modelo de crecimiento general (ecuación (8)), para cada árbol.*

Árbol	Error (cm/año)	Árbol	Error (cm/año)
EG4.1	0,0899	LM1.1	0,1249
EG4.2	0,0559	LM1.2	0,0858
EG5.1	0,0524	LM1.24	0,0841
EG5.2	0,0344	LM3.1	0,0920
EG5.3	0,0567	LM3.2	0,0686
EG7.1	0,0631	LM6.24	0,0387
EG7.2	0,0320	LM6.29	0,0629
EG9.1	0,0705	LM8.1	0,0662
EG9.2	0,0480	LM8.2	0,0589
		LM10.1	0,1423
		LM10.2	0,0805

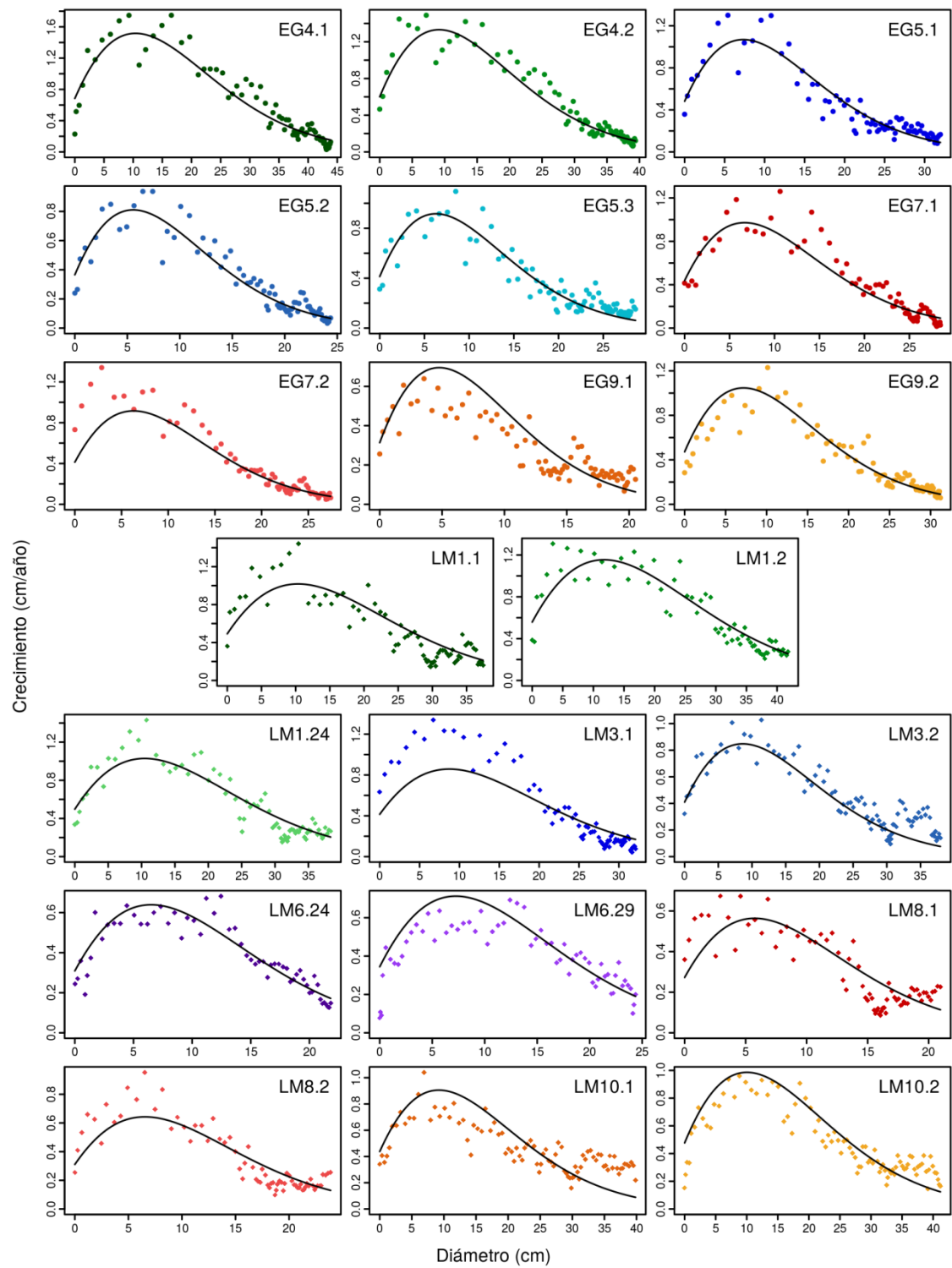


Figura 15. Modelo de crecimiento general (ecuación (8)) ajustado con la totalidad de los datos. Para cada individuo se muestra la predicción del modelo, en base a su diámetro a la edad de 75 años (D_{75}) y al índice de sitio (IS) correspondiente.

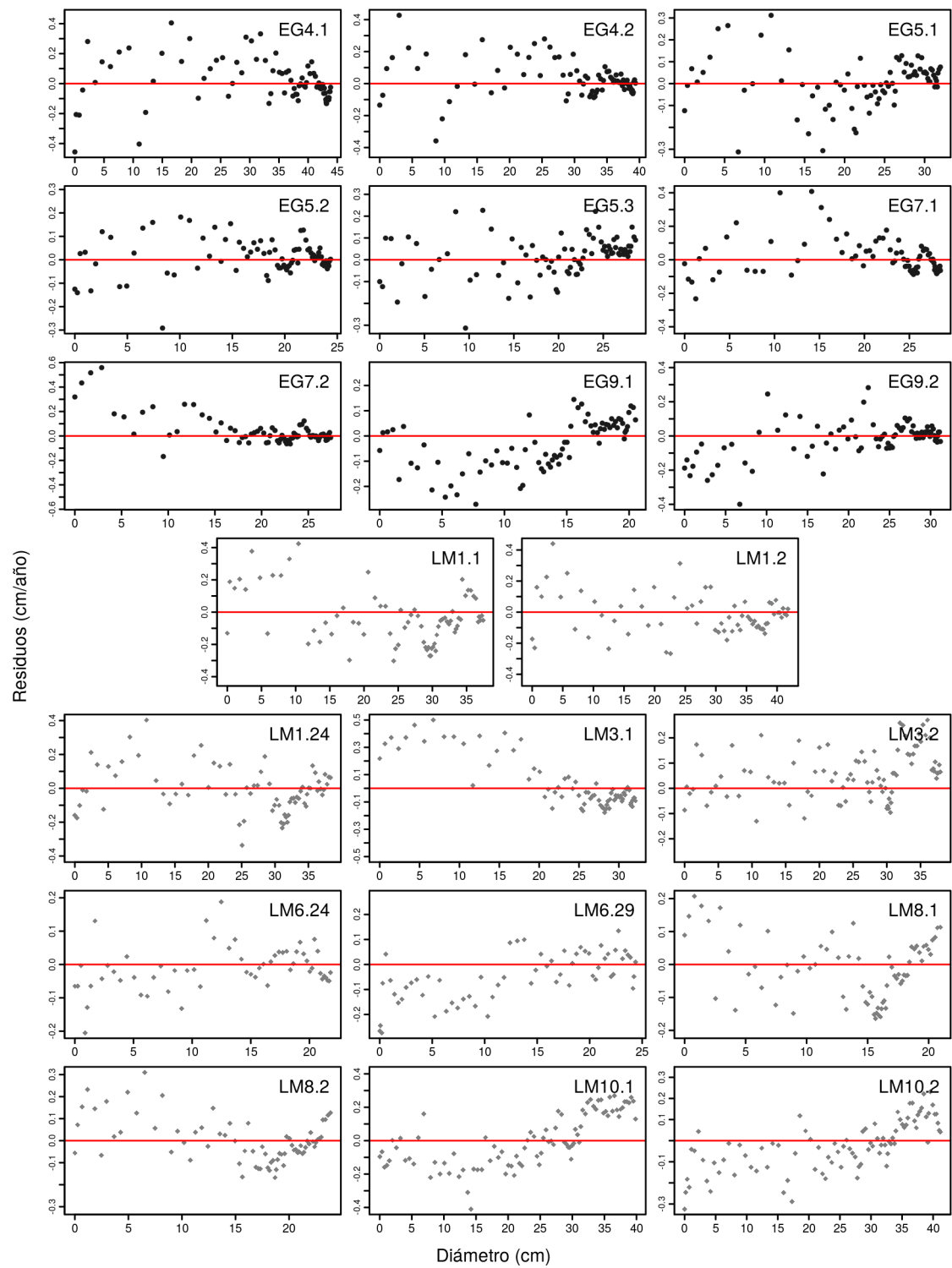


Figura 16. Residuos del modelo de crecimiento general (ecuación (8)) para cada árbol individual, correspondientes a las predicciones mostradas en la Figura 15.

En la Figura 17 se muestran los residuos totales por sitio obtenidos con este modelo. Los errores absolutos medios por sitio fueron de 0,0560 cm/año para EG y de 0,0774 cm/año para LM.

Por otro lado, se realizaron predicciones del diámetro en función de la EDAP para cada árbol (calculando el crecimiento acumulado estimado por el modelo, comenzando desde diámetro 0), los cuales se ven en la Figura 18. Por último se realizó una predicción similar, pero a partir de los datos de diámetro en el año 1950 (Figura 19).

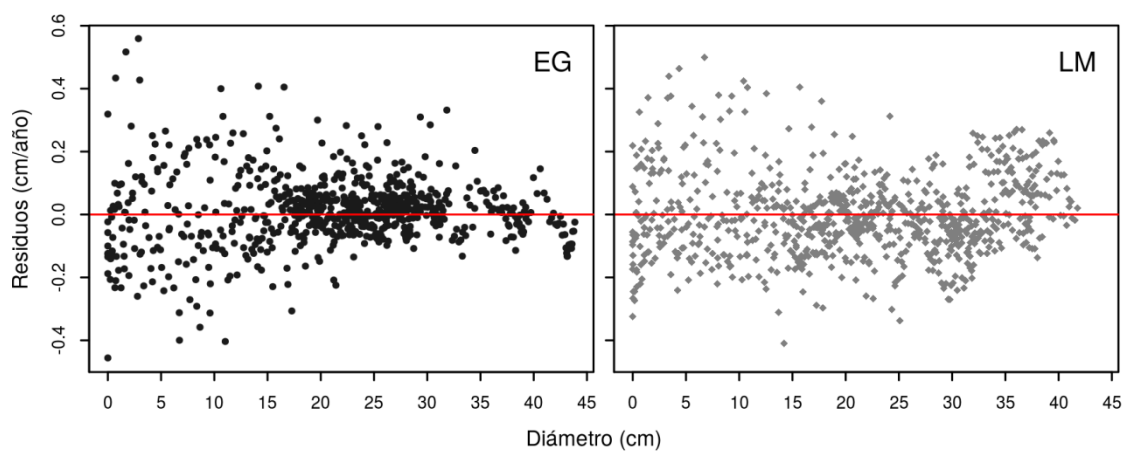


Figura 17. Residuos del modelo de crecimiento general (ecuación (8)) totales por sitio para los individuos de *Austrocedrus chilensis* en El Guadal (EG) y Loma del Medio (LM), Río Negro, Argentina.

Modelos potenciales

La prueba de F para las varianzas del D_{75} por sitio dio un resultado de F de 1.0613 y un valor de p de 0,9112, con lo cual se rechaza la hipótesis alternativa de que la razón entre las varianzas sea distinta de 1. Por lo tanto es razonable asumir que el D_{75} en ambos sitios presenta varianza equivalente.

La prueba de t de Student para analizar la diferencia entre las medias del D_{75} entre los sitios con 18 grados de libertad arrojó un valor de t de -0,6615 y un valor de p de 0,5167, con lo cual se descarta la hipótesis alternativa de que la diferencia entre las

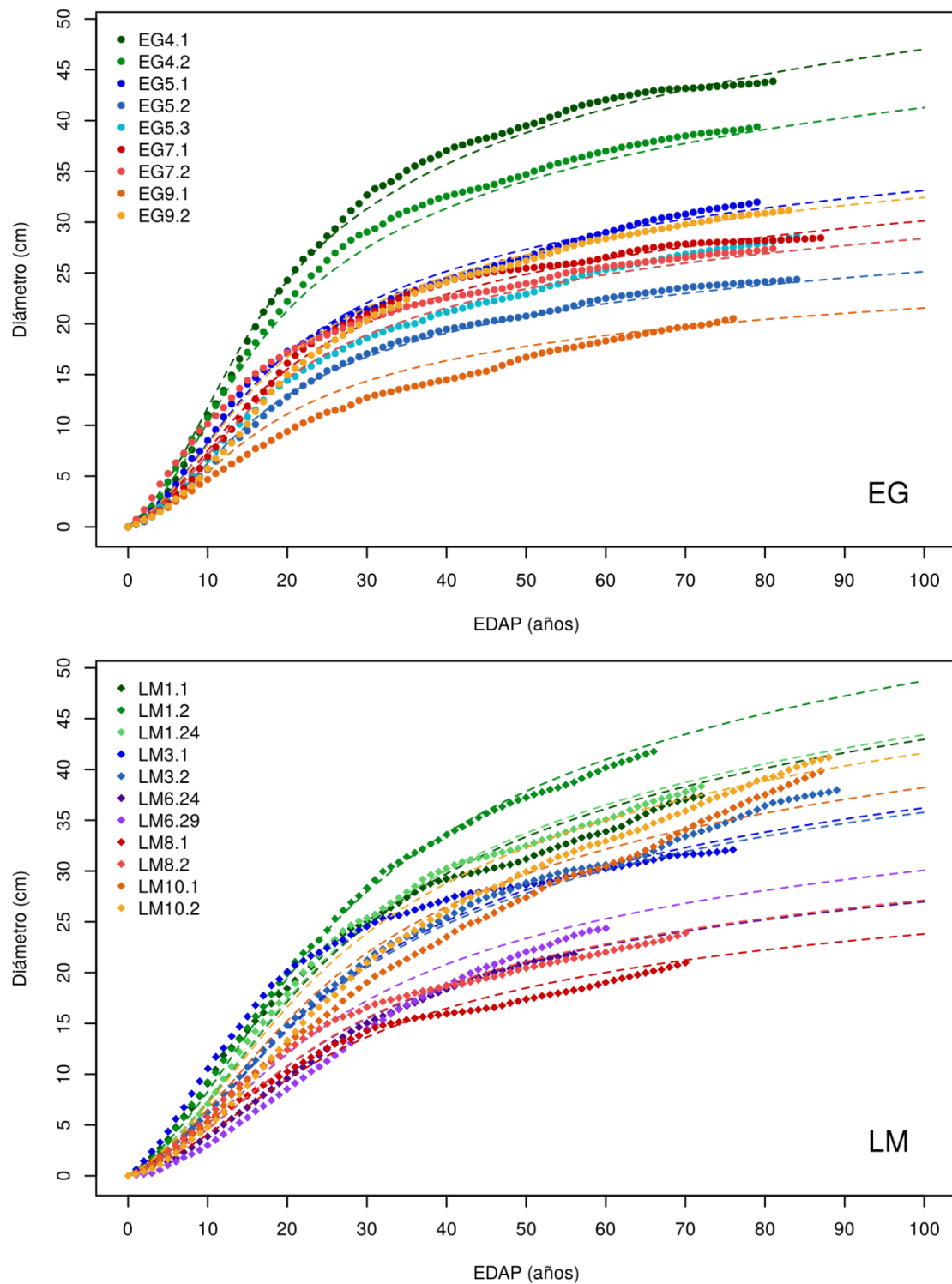


Figura 18. Predicción del diámetro a la altura del pecho en función de la edad a la altura del pecho (EDAP) obtenida con el modelo de crecimiento general (ecuación (8)), desde un diámetro inicial de 0 cm, para individuos de *Austrocedrus chilensis* en El Guadal (EG) y Loma del Medio (LM), Río Negro, Argentina. Los puntos simbolizan los datos medidos y las líneas de trazos discontinuos la predicción del modelo.

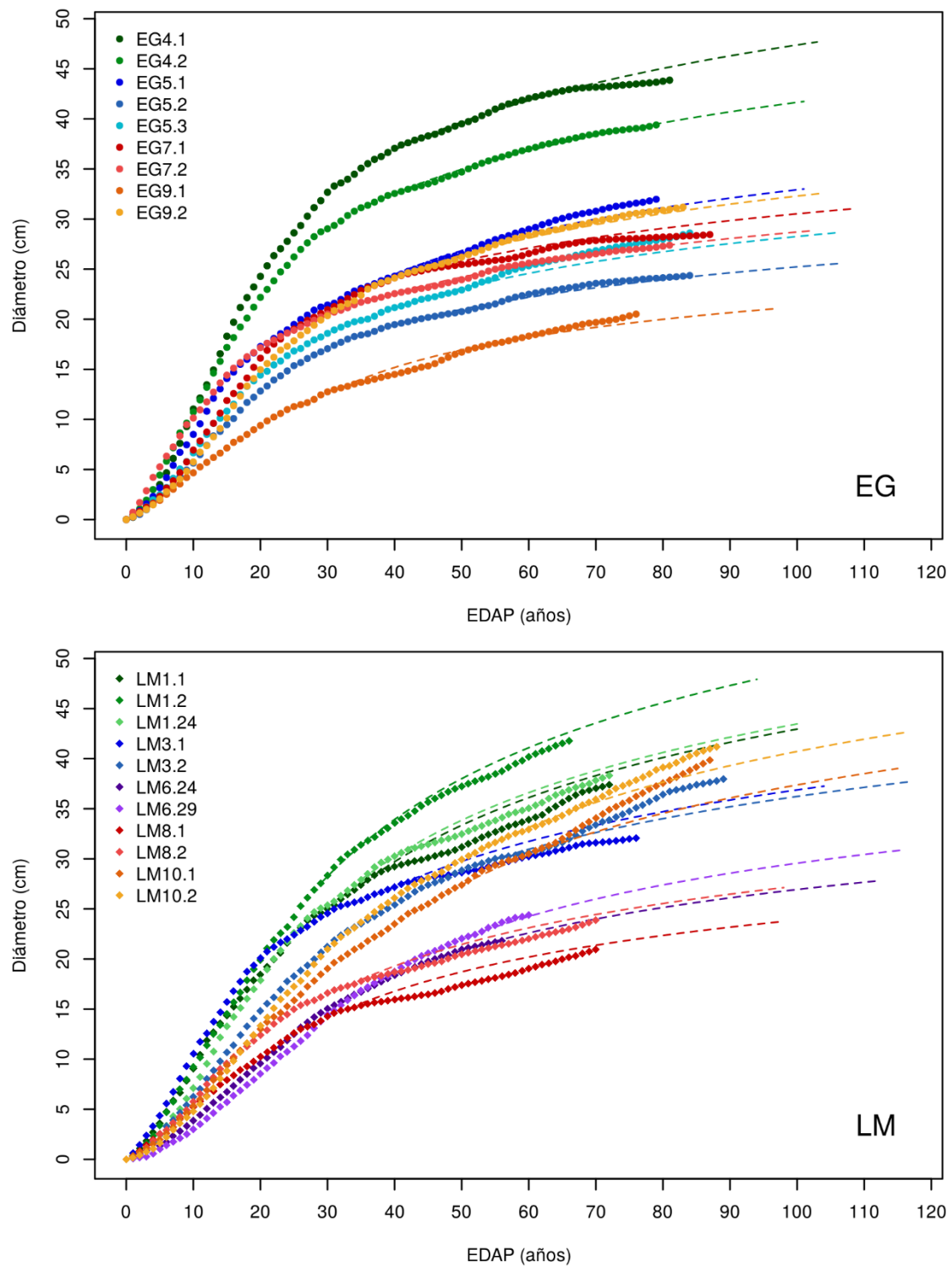


Figura 19. Predicción del diámetro a la altura del pecho en función de la edad a la altura del pecho (EDAP) obtenida con el modelo de crecimiento general (ecuación (8)), desde el diámetro en el año 1950, para individuos de *Austrocedrus chilensis* en El Guadal (EG) y Loma del Medio (LM), Río Negro, Argentina. Los puntos simbolizan los datos medidos y las líneas rayadas la predicción del modelo. El final de las líneas de trazos discontinuos corresponde al diámetro predicho para el año 2015.

medias es distinta de 0. Por lo tanto es razonable asumir que ambos sitios poseen una media poblacional equivalente.

A consecuencia del resultado de las dos pruebas anteriores, se calculó un único valor de D_{75pot} para ambos sitios, en base a la media del D_{75} (30,322 cm) y utilizando el valor de t correspondiente al percentil de 97,5 para 19 grados de libertad (2,093024) y el desvío estándar de la media (6,989 cm), según se explicó anteriormente. De esta manera el D_{75pot} calculado resultó ser 44,95 cm.

De esta manera, los modelos de crecimiento potencial por sitio, en función del diámetro, correspondientes a la ecuación (9), resultan:

$$\text{EG:} \quad \frac{\Delta D}{\Delta t_{pot}} = \frac{2,0902(D + 0,07976 \cdot 44,95)}{e^{\frac{3,55996}{(44,95)^{1,5}}(D + 0,07976 \cdot 44,95)^{1,5}}} \quad (11)$$

$$\text{LM:} \quad \frac{\Delta D}{\Delta t_{pot}} = \frac{0,14167(D + 0,10465 \cdot 44,95)}{e^{\frac{2,91608}{(44,95)^{1,5}}(D + 0,10465 \cdot 44,95)^{1,5}}} \quad (12)$$

Por último, el modelo de crecimiento potencial general en función del diámetro y del IS , correspondiente a la ecuación (10), resulta:

$$\frac{\Delta D}{\Delta t_{pot}} = \frac{e^{-0,10059 IS} (D + 0,00530 IS 44,95)}{e^{\frac{55,68401}{IS (44,95)^{1,5}}(D + 0,00530 IS 44,95)^{1,5}}} \quad (13)$$

Discusión

Las diferencias encontradas entre los patrones de crecimiento de ambos sitios, en cuanto a crecimiento máximo y crecimiento promedio en edades avanzadas, son consistentes con los encontrados por otros autores para los mismos sitios (Goya et al. 1998). Al igual que en dicho trabajo, se encontró que los individuos del sitio EG presentaban un crecimiento más acelerado en etapas tempranas y con valores

máximos de crecimiento más altos en comparación con los ejemplares del sitio LM. Por otro lado, y en concordancia con la misma bibliografía, el crecimiento en edades avanzadas fue mayor para los ejemplares del sitio LM con respecto a los del sitio EG.

En cuanto a los dos modelos aplicados a los árboles individuales comparados en este trabajo (ecuaciones (3) y (5)), si se comparan sus errores absolutos medios (Tabla 3) no se observa diferencia entre ambos modelos, aunque los errores tienden a ser menores con el modelo nuevo (ecuación (5)), principalmente en el sitio EG. Sin embargo, si se comparan los gráficos de los residuos para cada árbol en ambos modelos (Figura 7 y Figura 9), se puede observar que el crecimiento de los ejemplares está mejor representado por un modelo no tradicional (sin diámetro máximo) como el correspondiente a la ecuación (5).

El modelo de Birch modificado (correspondiente a la ecuación (3)), presenta en la mayoría de los ejemplares una distribución no homogénea de los residuos (Figura 7), con zonas de residuos negativos y otras de residuos positivos, que indicarían que es necesario realizar una transformación de los datos para que se ajusten al modelo (Vanclay 1994) o que el modelo no es adecuado para representar la forma de los datos. En este sentido, el modelo nuevo (ecuación (5)) presenta una distribución de los residuos mucho más homogénea en la mayoría de los casos (Figura 9). Sin embargo, algunos ejemplares (principalmente procedentes del sitio LM) muestran un sesgo en los residuos en los diámetros más grandes, pero esto podría deberse a un inadecuado recorte en los datos por el desconocimiento de la fecha en que se efectuó la corta de liberación antes mencionada. Por otro lado, en ciertos ejemplares donde se ve un leve sesgo, el mismo podría deberse a la arbitrariedad de la elección del valor de 1 para el parámetro β_1 de la ecuación (4), el cual podría ser vuelto a incorporar como parámetro en futuros estudios para lograr mejores ajustes. Este comportamiento también podría deberse a la arbitrariedad de la elección de valor 1,5 para el exponente k de la

ecuación (4), el cual también podría incorporarse como parámetro en futuros estudios para un ajuste más preciso.

En ambos casos, los residuos presentaron una dispersión mayor en los diámetros menores y una dispersión menor en los diámetros mayores, lo cual estaría mostrando que la varianza de los datos no es constante. Dicha diferencia era esperable debido a la naturaleza de los datos, y de todos modos no sería preocupante, ya que el modelo no se utilizaría, en principio, para modelar las etapas tempranas del crecimiento.

Debido al buen ajuste de las curvas predichas con el modelo nuevo para cada árbol individual fue posible predecir el D_{75} de los árboles para los cuales se desconocía este dato. Si bien se trata de una extrapolación hecha con el mismo modelo que luego se aplicaría en general para todos los árboles, esta estimación es razonable, ya que el ajuste de la curva individual para esos ejemplares es considerablemente bueno, como se puede apreciar en la Figura 10.

La normalización de los datos permitió que se pudieran ajustar los datos de cada sitio por medio de una única curva (Figura 13), cosa que previamente a dicha normalización hubiera sido difícil de lograr y hubiera sido poco representativa de los datos, debido a la dispersión y heterogeneidad de las curvas individuales (Figura 2). El ajuste del modelo normalizado para cada sitio fue satisfactorio, como puede apreciarse en sus respectivos gráficos de residuos (Figura 14), donde se ve que nuevamente éstos son en general insesgados y con mayor dispersión en los diámetros menores. Nuevamente, se observa que en el sitio LM existe un sesgo en los residuos en los diámetros mayores, atribuible a las mismas razones que se explicaron anteriormente.

Como los parámetros para las curvas normalizadas se utilizaron para obtener curvas no normalizadas para cada sitio (pero dependientes del D_{75} de cada árbol) no se perdió la información del crecimiento individual de cada árbol, aunque si se perdió precisión al obtener una única terna de parámetros para cada sitio (en lugar de una

terna por cada árbol), pero esto es una pérdida mínima y razonable al querer lograr la generalidad.

Un sacrificio similar en precisión se produjo al intentar generalizar el modelo para que incluyera el *IS*. En este caso, esta generalización es menos confiable, ya que se contaba con datos de sólo 2 sitios, lo cual es insuficiente para lograr captar correctamente el efecto del *IS* sobre los parámetros del modelo. En este sentido sería mucho más deseable trabajar con un modelo para cada sitio por separado, sin tener en cuenta el *IS*, pero ese no era el objetivo de este trabajo. De todas maneras, el resultado del modelo general (con la inclusión del *IS*) es muy razonable si se limita a los sitios estudiados, como puede comprobarse en la Figura 15 y Figura 16, donde se pueden ver los resultados de dicho modelo para cada árbol individual y sus respectivos residuos. En estos últimos, se puede apreciar que ahora en algunos casos (EG7.2, EG9.1, LM3.1, LM10.1, LM10.2) el sesgo de los residuos es muy marcado, mientras que en el resto de los ejemplares los residuos se distribuyen de manera más homogénea. Esta falta de precisión es debida a la generalización alcanzada. Sin embargo, al analizar los residuos totales por sitio (Figura 17), se ve que estos nuevamente son en general insesgados y con una mayor dispersión en los diámetros menores, similar a lo observado anteriormente. Por lo tanto, si bien el modelo podría resultar sesgado para algún ejemplar en particular, estos sesgos deberían compensarse al analizar a todos los individuos de una parcela.

La alternativa de considerar diferentes calidades de sitio dentro de los sitios mencionados (tal vez por parcela) es muy razonable desde el punto de vista teórico debido a la amplia variedad de ambientes que presentan las zonas muestreadas. Sin embargo, en este trabajo se decidió considerar que los sitios presentaban una única calidad de sitio cada uno, debido al bajo número de muestras con que se contaba. Un recorte de mayor detalle en cuanto a las calidades de sitio hubiese conllevado un

número muy chico de muestras por calidad de sitio, haciendo que el análisis fuese poco representativo. En este sentido se prefirió sacrificar precisión en la representatividad de los sitios para mantener un número de muestras adecuado. Si se contara con más muestras de cada parcela, tal vez se podrían considerar más calidades de sitio distintas y así lograr un modelo de crecimiento generalizado más confiable, dónde se hubiera podido captar mejor la incidencia del *IS* sobre los parámetros del modelo.

Una limitación de este trabajo es que el modelo obtenido no puede ser contrastado con datos independientes para su validación, debido a que no se cuenta con más datos de árboles dominantes y codominantes de los sitios estudiados. Además, como los datos con que se contaba eran tan escasos, no se pudieron dejar datos fuera del estudio para luego usarlos como datos independientes y así validar el modelo. Por otro lado, como no se contaba con datos de árboles de estratos inferiores, tampoco se pudo ver si el modelo se ajusta bien al crecimiento de dichos ejemplares (es decir que no podemos saber si los ejemplares oprimidos realmente tendrán curvas de formas similares a la de los árboles dominantes y codominantes y que por lo tanto su crecimiento se pueda predecir a partir de una función potencial).

Por lo tanto, para intentar ver si el modelo servía para predecir el crecimiento de los árboles, se realizaron dos predicciones distintas, como se explicó anteriormente y cuyos resultados se pueden ver en la Figura 18 y la Figura 19. La predicción a partir de un diámetro de 0 cm (Figura 18) es más precisa en los ejemplares del sitio EG que en los del sitio LM, donde era de esperarse un menor precisión, ya que las curvas originales no eran tan similares y además se había visto que los datos se alejaban del modelo en los últimos años para dicho sitio. En cuanto a la predicción realizada a partir del diámetro de cada ejemplar en el año 1950 (Figura 19) (algo similar a lo que se haría a la hora de utilizar este modelo), se ve que para algunos árboles la predicción

mejoró un poco, aunque para algunos ejemplares empeoró con respecto a la predicción desde diámetro 0. En este caso, nuevamente se observó una mayor precisión en los ejemplares del sitio EG con respecto a los de LM, como era de esperarse.

El modelo potencial, ya sea en su forma general (ecuación (13)) o en sus casos particulares por sitio (ecuaciones (11) y (12)), debería ser modificado por un factor de competencia (FC), propio de cada individuo, para poder predecir el crecimiento de cada árbol en particular. Este FC debería representar de alguna manera la competencia intra e inter-específica a la que está sometido cada individuo. Dicho FC debería multiplicar al D_{75pot} en todas las instancias de las respectivas ecuaciones.

De este modo, los modelos de crecimiento por sitio, en función del diámetro y el FC , obtenidos de las ecuaciones (11) y (12), resultarían:

$$\text{EG:} \quad \frac{\Delta D}{\Delta t} = \frac{2,0902(D + 0,07976 \cdot 44,95 \cdot FC)}{\frac{3,55996}{e^{(44,95 \cdot FC)^{1,5}}} (D + 0,07976 \cdot 44,95 \cdot FC)^{1,5}} \quad (14)$$

$$\text{LM:} \quad \frac{\Delta D}{\Delta t} = \frac{0,14167(D + 0,1046 \cdot 44,95 \cdot FC)}{\frac{2,91608}{e^{(44,95 \cdot FC)^{1,5}}} (D + 0,1046 \cdot 44,95 \cdot FC)^{1,5}} \quad (15)$$

Por último, el modelo de crecimiento en función del diámetro, el IS y el FC , obtenido de la ecuación (13), resultaría:

$$\frac{\Delta D}{\Delta t} = \frac{e^{-0,10059 IS} (D + 0,00530 IS 44,95 FC)}{\frac{55,68401}{e^{IS (44,95 FC)^{1,5}}} (D + 0,00530 IS 44,95 FC)^{1,5}} \quad (16)$$

Una ventaja de tener un modelo potencial general que sea modificado en particular por la competencia, es que podría utilizarse para predecir el efecto que tendría sobre el crecimiento una corta de raleo (o cualquier corta similar) o el comportamiento de la especie en diferentes densidades. Para esto sería esencial contar con un FC que sea bien representativo de las diferentes condiciones (cuya

determinación escapa al objetivo de este trabajo), así como disponer de una función con parámetros más confiables, obtenidos a partir de mayor cantidad y variedad de datos que con los que se contó para la realización de este trabajo.

Otra cuestión a tener en cuenta es que este modelo fue ajustado con árboles que pertenecían a una masa semi-coetánea. Habría que analizar también cómo se comportaría un modelo de este tipo con masas disetáneas, es decir si árboles más jóvenes que crezcan bajo un dosel de árboles ya establecidos se comportarían de manera similar a los árboles oprimidos de mayor edad, o si por el contrario presentarían una forma de crecimiento distinta y este modelo no alcanzara para representar esos casos. De todas maneras, sin tener un *FC* establecido y datos de diferentes tipos de rodales no se puede avanzar en este sentido.

Para la aplicación práctica de un modelo como el obtenido en este trabajo, habría que medir los diámetros de todos los individuos de las parcelas de muestreo (de cantidad y tamaño acordes con el tamaño del rodal que se desee predecir el crecimiento). Dichos diámetros deberían ser transformados a valores de diámetros sin corteza (por medio de algún factor de corteza o transformación similar) para poder ser introducidos en el modelo, ya que éste trabaja exclusivamente con diámetros sin corteza. Por otro lado, con los datos de los diámetros deberían calcularse los *FC* para cada individuo, para poder modificar el D_{75pot} en las ecuaciones y predecir así el crecimiento para cada individuo en el siguiente año. Este crecimiento predicho se podría sumar al diámetro actual y obtener una estimación del diámetro futuro. Con este nuevo diámetro, se podría volver a ingresar en el modelo y obtener un nuevo dato de crecimiento (y por acumulación, de diámetro). Esta operación se podría repetir para obtener el diámetro estimado dentro de cualquier cantidad de años. Estos datos,

luego, deberían ser reconvertidos a valores de diámetro con corteza (mediante una operación inversa a la anterior). Dichos datos de diámetro pueden resultar esenciales para la toma de decisiones, ya sea, por ejemplo, para predecir el volumen en pie (mediante alguna ecuación adecuada) o para poder lograr una cierta distribución diamétrica deseada (dependiente de los objetivos del manejo).

Conclusiones

Si bien los datos con que se contaba en este trabajo eran escasos (relativamente pocos árboles dominantes y codominantes por sitio y sólo dos sitios distintos) para lograr obtener un único modelo de crecimiento en diámetro para los ejemplares de ciprés de la cordillera de la zona, los métodos utilizados en este trabajo han resultado muy efectivos para abordar el tema, y podrían volver a utilizarse para generar una serie de parámetros más confiables si se contara con más variedad y cantidad de datos.

En este sentido, cabe destacar el aporte novedoso y original del empleo de dos técnicas que han sido de especial ayuda para la resolución de las problemáticas planteadas. La primera de ellas fue el uso del software libre de matemática dinámica GeoGebra para la estimación visual de los parámetros iniciales que serían necesarios para que el software estadístico R pudiera iniciar su algoritmo de estimación de los parámetros del modelo. El GeoGebra, al tratarse de un software de matemática dinámica, permite ver, en tiempo real, cómo influye cada uno de los parámetros a la forma del modelo y de este modo acelerar el proceso de elección de parámetros iniciales razonables, así como también ayuda a la comprensión de qué peso tienen y qué aspecto de la función modifica cada parámetro, lo cual es esencial a la hora de la elección del modelo a emplear, o las modificaciones que se quieran realizar a éste.

La segunda técnica importante aplicada en este trabajo, fue la normalización de los datos, para obtener curvas que fueran más similares entre sí, y que por lo tanto tuviera sentido aproximarlas por medio de una única curva. En este sentido, la normalización de los datos fue esencial para el alcance del objetivo de este trabajo, porque además se realizó de manera que tuviera sentido su expresión en las ecuaciones, y entonces se pudiera volver a obtener curvas no normalizadas a partir de los mismos parámetros.

Si bien los modelos de crecimiento potenciales obtenidos en este trabajo no pueden ser utilizados en la práctica de manera directa (por faltar la determinación del FC que los modificaría y por la falta de confiabilidad en los parámetros obtenidos debido a la escasez de los datos), éstos resultan un importante paso inicial para la determinación de modelos de este tipo que, al menos en teoría, podrían ser muy útiles y flexibles.

En este sentido, el modelo de crecimiento potencial general (ecuación (13)) y su correspondiente modelo de crecimiento general (ecuación (16)) resultan de limitada aplicación y no serían muy confiables a la hora de extrapolarlos a otros IS , ya que la influencia del sitio sobre los parámetros no ha podido ser captada correctamente, por contarse con datos correspondientes únicamente a 2 sitios. Si se ampliara el estudio a más sitios, se podría generar una función general para la zona, que fuera aplicable, en principio, a una amplia variedad de sitios diferentes. Mientras tanto, los modelos de crecimiento potenciales por sitio (ecuaciones (11) y (12)) y sus correspondientes modelos de crecimiento por sitio (ecuaciones (14) y (15)) resultan más adecuados, aunque se encuentran limitados en su aplicabilidad a sus respectivos sitios.

Bibliografía

Birch, C. P. D. 1999. A New Generalized Logistic Sigmoid Growth Equation Compared with the Richards Growth Equation. *Annals of Botany* 83: 713-723.

Burns, S. L., Goya, J. F., Arturi, M. F., Yapura, P. F. & Perez, C. A. 2013. Stand dynamics, spatial pattern and site quality in *Austrocedrus chilensis* forests in Patagonia, Argentina. *Forest Systems* (2013) 22 (2): 170-178.

Cabrera, A. L. 1971. Fitogeografía de la República Argentina. *Boletín de la Sociedad Argentina de Botánica* 14 (1-2): 1-42.

Cabrera, A. L. & Willink, A. 1980. Biogeografía de América Latina. Monografías de la OEA, Serie de Biología, 13: 1-122.

Dezzotti, A. & Sancholuz, L. 1991. Los bosques de *Austrocedrus chilensis* en Argentina: ubicación, estructura y crecimiento. *Bosque* 12(2): 43-52.

Donoso Zegers, C. 1993. Bosques templados de Argentina y Chile: Variación, estructura y dinámica. Editorial Universitaria S.A., Santiago de Chile. pp: 414-424.

Ferrando, J. J., Goya, J. F., Bocos, D. A. & Yapura, P. F. 1993. Aplicación de un modelo de crecimiento en diámetro para ciprés de la cordillera (*Austrocedrus chilensis* (Don) Flor. et Boutleje), en El Bolsón, Provincia de Río Negro. En: Actas de las VII Jornadas Técnicas Forestales: Ecosistemas Forestales Nativos: Uso, manejo y conservación. Eldorado. Misiones: 374.

Fox, J. & Wisberg, S. 2010. Nonlinear Regression and Nonlinear Least Squares in R. An Appendix to An R Companion to Applied Regression, second edition. Disponible en: <https://socserv.socsci.mcmaster.ca/jfox/Books/Companion/appendix/Appendix-Nonlinear-Regression.pdf>. Último acceso: Marzo 2016.

Fritts, H. C. 1976. Tree Rings and Climate. Academic Press, New York. 567 pp.

- Goya, J. F., Ferrando, J. J., Bocos, D. A. & Yapura, P. F.** 1995. Estructura y desarrollo de un rodal coetáneo de *Austrocedrus chilensis* en El Bolsón, Río Negro, Argentina. Revista de la Facultad de Agronomía, La Plata 71 (2): 165-171.
- Goya, J. F., Yapura, P. F., Ferrando, J. J., Barrera, M. D. & Arturi, M. A.** 1998. Crecimiento individual y de rodales de *Austrocedrus chilensis* en El Bolsón, Río Negro, Argentina. Revista de la Facultad de Agronomía, La Plata 103 (2): 149-155.
- Goya, J. F., Ferrando, J. J. & Yapura, P. F.** 2005. Aspectos silviculturales de los bosques de *Austrocedrus chilensis* de la región de El Bolsón, Río Negro. En: Ecología y manejo de los bosques de Argentina. Compiladores: Goya, Juan F.; Frangi, Jorge L.; Arturi, Marcelo Fabián. Editorial de la Universidad Nacional de La Plata (EDULP). <http://sedici.unlp.edu.ar/handle/10915/15915>
- Hahn, J. T. & Leary, R. A.** 1979. Potential Diameter Growth Functions. USDA Forest Service General Technical Report NC-49: 22-26.
- Holmes, R. L.,** 1983. Computer-assisted quality control in tree-ring dating and measurement. Tree-ring Bulletin 43: 69-78.
- La Manna, L.** 2005. Caracterización de los suelos bajo bosque de *Austrocedrus chilensis* a través de un gradiente climático y topográfico en Chubut, Argentina. Bosque 26(2):137-153.
- Menéndez, J. L. & La Rocca, S. M.** 2007. Primer inventario nacional de bosques nativos. Secretaria de Ambiente y Desarrollo Sustentable. Disponible en: <http://www.greenpeace.org/argentina/Global/argentina/report/2010/1/primer-inventario-nacional-bosques>. Último acceso: Agosto 2016.
- Navarrete Espinoza, E.** 2008. Modelos de crecimiento diametral para *Austrocedrus chilensis* en la Cordillera de Nahuelbuta, Chile: Una interpretación biológica. Cien. Inv. Agr. 33(3): 311-320.

- Palahí, M., Pukkala, T., Kasimiadis, D., Poirazidis, K. & Papageorgiou, A. C.** 2008. Modelling site quality and individual-tree growth in pure and mixed *Pinus brutia* stands in north-east Greece. *Annals of Forest Science* 65: 501p1-501p14.
- Pastorino, M. J., Fariña, M .M., Bran, D. & Gallo, L. A.** 2006. Extremos geográficos de la distribución natural de *Austrocedrus chilensis* (Cupressaceae). *Boletín de la Sociedad Argentina de Botánica* 41 (3-4): 307-311.
- Richards, F. J.** 1959. A Flexible Growth Function for Empirical Use. *Journal of Experimental Botany* 10 (29): 290-300.
- Sánchez-González, M., Tomé, M. & Montero, G.** 2005. Modelling height and diameter growth of dominant cork oak trees in Spain. *Annals of Forest Science* 62: 633-643.
- Vancley, J. K.** 1994. Modelling forest growth and yield. Applications to mixed tropical forests. Ed. CAB International, Reino Unido. 311 pp.
- Veblen, T. T., Burns, B. R., Kitzberger, T., Lara, A. & Villalba, R.** 1995. The Ecology of the conifers of Southern South America. En: *Ecology of the southern conifers*. Enright, N.J. & Hills, R.S. (Eds.). Melbourne University Press, Carlton. pp: 120-155.
- Villalba, R.** 2002. Influencias climáticas en la dinámica forestal del ecotono bosque-estepa en el norte de Patagonia. En: *IANIGLA, 30 Años de Investigación Básica y Aplicada en Ciencias Ambientales*. Trombottto T., Villalba R. (eds.), Mendoza. pp: 19-23.
- Villalba, R. & Veblen, T. T.** 1997. Regional patterns of tree population age structures in northern Patagonia: climatic and disturbance influences. *Journal of Ecology* 85: 113-124.
- Villalba, R. & Veblen, T. T.** 1998. Influences of large-scale climatic variability on episodic tree mortality in northern Patagonia. *Ecology* 79(8): 2624-2640.
- Wykoff, W. R. & Monserud, R. A.** 1988. Representing site quality in increment models: a comparison of methods. *USDA Forest Service General Technical Report NC-120*: 184-191.

Yamaguchi, D. K. 1991. A simple method for cross-dating increment cores from living trees. *Canadian Journal of Forest Research* 21: 414-416.

Yin, X., Goudriaan, J. A. N., Lantinga, E. A., Vos, J. A. N., & Spiertz, H. J. 2003. A flexible sigmoid function of determinate growth. *Annals of Botany*, 91(3): 361-371.

Zeide, B. 1993. Analysis of Growth Equations. *Forest Science*, 39 (3): 594-616.

Apéndice A: Obtención del modelo normalizado (ecuación (6)) a partir del modelo nuevo (ecuación (5))

A partir de la ecuación:

$$\frac{\Delta D}{\Delta t} = \frac{a(D+b)}{e^{c(D+b)^{1.5}}} \quad (5)$$

Sea

$$D_{norm} = \frac{D}{D_{75}}$$

Entonces

$$D = D_{norm} D_{75}$$

Reemplazando en (5):

$$\frac{\Delta D}{\Delta t} = \frac{a(D_{norm} D_{75} + b)}{e^{c(D_{norm} D_{75} + b)^{1.5}}}$$

Sacando factor común D_{75} en los paréntesis:

$$\frac{\Delta D}{\Delta t} = \frac{a D_{75} \left(D_{norm} + \frac{b}{D_{75}} \right)}{e^{c(D_{75})^{1.5} \left(D_{norm} + \frac{b}{D_{75}} \right)^{1.5}}}$$

Dividiendo ambos miembros de la igualdad por D_{75} :

$$\frac{\frac{\Delta D}{\Delta t}}{D_{75}} = \frac{a \left(D_{norm} + \frac{b}{D_{75}} \right)}{e^{c(D_{75})^{1.5} \left(D_{norm} + \frac{b}{D_{75}} \right)^{1.5}}}$$

Sean

$$\frac{\frac{\Delta D}{\Delta t}}{D_{75}} = \frac{\Delta D}{\Delta t_{norm}} \quad \frac{b}{D_{75}} = b' \quad c(D_{75})^{1.5} = c'$$

Entonces resulta:

$$\frac{\Delta D}{\Delta t_{norm}} = \frac{a(D_{norm} + b')}{e^{c'(D_{norm} + b')^{1.5}}} \quad (6)$$

Actividades optativas realizadas y su vinculación con el Trabajo Final

Se realizaron diversas actividades optativas, algunas de las cuales tienen íntima relación con este trabajo final. Por un lado el curso de Introducción a la Dendrocronología fue fundamental para la primera etapa del trabajo, tanto en el acondicionamiento de las muestras, la medición de las mismas y en la utilización e interpretación de los resultados del software COFECHA.

Por otro lado, la pasantía “Técnicas dendrocronológicas de muestreo para la reconstrucción de historia de incendios en bosques de *Araucaria araucana*”, aportó experiencia de campo que me resultó útil para familiarizarme con cuestiones prácticas de relevancia y otro acercamiento a las técnicas dendrocronológicas, que si bien no fueron las mismas utilizadas en este trabajo, están muy relacionadas y fueron de gran ayuda a la hora de realizar las mediciones y sortear los diferentes obstáculos que se presentaron en las primeras etapas del trabajo.

Por último, la beca “Modelización matemática en dinámica de crecimiento” sirvió como primer acercamiento, por un lado a la utilización de software matemático para modelizar el crecimiento de los árboles y por otro lado a la lógica de la programación en diversos lenguajes utilizados en los diferentes softwares. También aportó importantes herramientas al momento de la utilización de diversos algoritmos para la resolución de diferentes problemáticas.